Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
28.01.2010

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Nullmengen in $\mathbb{R}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) $U \subseteq \mathbb{R}^3, U$ offen.

(c) $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_D f(x,y)\, d(x,y)$$

für die Funktion $f(x,y) = y$ und das Gebiet D zwischen dem oberen Einheitskreis (d.h. $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$) und der Funktion $y = 1 - x^2$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Gebiet aussieht und welche Integrationsreihenfolge zweckmäßig ist.

Aufgabe G3

Es sei B ein Normalbereich bezüglich der $x-$ und der $y-$Achse, d.h.

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$.

(a) Zeige: Ist f stetig auf B, so gilt

$$\int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

(b) Sei f eine stetige Riemann-integrierbare Funktion. Vertausche die Reihenfolge der Integrationen für

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)\, dy\, dx.$$

(c) Berechne das Integral

$$\int_B xy\, d(x,y), \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (4+3 Punkte)

Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$. (Machen Sie eine Skizze!)

(a) Bestimmen Sie für festes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$M_{(x,y)} \;:=\; \{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in M\}$$

and berechnen Sie den Inhalt $|M_{(x,y)}|$.

(b) Berechnen Sie das Volumen $|M|$ von M.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge ist, deren Abschluss nur endlich viele Häufungspunkte $x_1, \ldots, x_n$ hat, dann ist M eine Jordansche Nullmenge.

Aufgabe H3 (3+5 Punkte)

Gegeben seien $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ und die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\, dy\right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\, dx\right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.

Erläutern Sie, warum das Integral

$$\int_G f(x,y)\, d(x,y)$$

nicht existiert.