Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
21.01.2010

12. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Sei $V = C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
( ) Jedes Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
( ) Jedes Gradientenvektorfeld $f \in V$ ist geschlossen.
( ) Jedes geschlossene Vektorfeld auf einem sternförmigen Gebiet besitzt ein Potential.

Aufgabe G2

(a) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX$ über $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$.

Aufgabe G3

Betrachte das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy\exp(xy) \\ x^2\exp(xy) - 2y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld eine Potentialfunktion besitzt.

(b) Berechnen Sie diese Potentialfunktion F.
Hinweis: Wir wissen, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. Bestimmen Sie eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass
$$F(x,y) = h(x,y) + g(y)$$
mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Danach bestimme die Funktion g.

(c) Differenzieren Sie F, um zu überprüfen, dass es sich wirklich um ein Potential handelt.

(d) Berechnen Sie für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 1-t^2)$ das Wegintegral
$$\int_\gamma f(x) \cdot dx.$$

Aufgabe G4

Hat

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 3x^2z \\ x^2 + 3y^2z^2 \\ x^3 + 2y^3z \end{pmatrix}$$

ein Potential? Wenn ja, dann bestimmen Sie dieses Potential.

Hausübung

Die Hausaufgabe H1 ist als Präsentationsaufgabe geeignet!

Aufgabe H1 (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y) = (3x + 2y, 2x).$$

(a) Betrachten Sie den durch $Y(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$ für $t \in [0, \pi/2]$ gegebenen Weg W. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dY$.

(b) Besitzt F ein Potential φ? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$ längs eines Weges W, der die Punkte $P_1 = (1, 0)$ und $P_2 = (0, 2)$ verbindet, unter Verwendung von b).

Aufgabe H2 (3+1+3+1+3+3 Punkte)

Es sei daran erinnert, dass ein geschlossenes Vektorfeld auf der gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ keine Stammfunktion zu besitzen braucht, siehe Beispiel Seite 219 im Skript.

Es sei nun ω eine geschlossenes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, und zusätzlich gelte $\int_\gamma \omega \cdot dX = 0$ für den Weg

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

(dies war im eben zitierten Beispiel gerade nicht erfüllt). Es soll gezeigt werden, dass unter diesen stärkeren Voraussetzungen ω eine Stammfunktion besitzt.

(a) Skizzieren Sie $U_1 := \mathbb{R}^2 - \{(r, 0)\colon r \leq 0\}$ und $U_2 := \mathbb{R}^2 - \{(0, r)\colon r \leq 0\}$. Sind diese Mengen sternförmig bzgl. geeigneter Punkte ? Sind sie offen ? Zeigen Sie, dass ω auf U_1 (bzw. U_2) eine Stammfunktion F_1 (bzw. G_2) besitzt.

(b) Begründen Sie, dass auch $F_2\colon U_2 \to \mathbb{R}$, $F_2(x, y) := G_2(x, y) - G_2(1, 0) + F_1(1, 0)$ eine Stammfunktion für ω auf U_2 ist. Es gilt $F_1(1, 0) = F_2(1, 0)$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0 \text{ oder } y > 0\}$. Zeigen Sie, dass Γ offen und zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass F_1 und F_2 auf Γ übereinstimmen.

(d) Zeigen Sie, dass F_1 und F_2 auf dem offenen Quadranten $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x < 0 \text{ und } y < 0\}$ sich höchstens um eine Konstante unterscheiden, d.h. $F_2|_Q - F_1|_Q = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma|_{[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]}} \omega \cdot dX = F_1(1, 0) - F_1(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{und}$$

$$\int_{\gamma|_{[0, \frac{5}{4}\pi]}} \omega \cdot dX = F_2(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - F_2(1, 0) \quad \text{gilt.}$$

Schließen Sie, dass $C = 0$ in Teil (d).

(f) Begründen Sie kurz, warum durch $F(x, y) := F_1(x, y)$ für $(x, y) \in U_1$, $F(x, y) := F_2(x, y)$ für $(x, y) \in U_2$ eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, und warum diese eine Stammfunktion zu ω ist.