Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
14.01.2010

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurven.
- $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, mit $r, c > 0$.
- $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

b) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante C_L. Zeigen Sie, dass h rektifizierbar und $L(Z, h) \le C_L \cdot (b - a)$ für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist.

Aufgabe G2

Fließt ein konstanter Strom I durch einen unendlich langen Leiter, dann wird das Magnetfeld

$$F(x, y, z) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

aufgebaut, falls die z-Achse in Stromrichtung liegt. Sei der Weg W eine Kreislinie in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene mit Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt auf der z-Achse, durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Parametrisieren Sie den Weg und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$.

Aufgabe G3

Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene. Der Weg W verbinde die drei Punkte entlang der Kanten des Dreiecks mit den Ecken A, B, C. Parametrisieren Sie die Kanten $K(A, B)$, $K(B, C)$, $K(C, A)$ und den Weg W. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{K(A,B)} (x, y) \cdot dX, \ \int_{K(B,C)} (x, y) \cdot dX, \ \int_{K(C,A)} (x, y) \cdot dX, \ \int_W (x, y) \cdot dX.$$

Aufgabe G4

a) Zeige, dass eine Menge $A \subset M$ genau dann zusammenhängend ist, wenn jede stetige Funktion

$$f : A \to \{0, 1\}$$

konstant ist.

b)

$$A := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, \infty)\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Zeige, dass A zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten einen Weg der Gestalt

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\phi) = r(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi),$$

wobei $r : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

a) Begründen Sie, dass γ rektifizierbar ist und zeigen Sie

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2}\, d\phi.$$

b) Im Falle

$$r : [-\pi, \pi] \to [0, \infty), \quad r(\phi) := 1 + \cos\phi$$

nennt man die zugehörige Kurve Kardioide.
Zeigen Sie, dass die Kardioide eine Jordankurve ist.

c) Begründen Sie, dass die Kardioide eine Kurvenlänge besitzt und berechnen Sie diese.

Aufgabe H2 (3 Punkte)

In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x, y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x, y) \in H$, wobei x, y in Metern). Ein junger Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2, 0)$ nach $(1, 1)$. Zur Zeit $t \in [0, 1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2 - t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x, y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x, y) = 0{,}2 \cdot h(x, y)$ (in Liter pro Meter). Berechnen Sie das Gesamtvolumen Staub (in Liter), das längs der Strecke Γ eingesaugt wird.

Aufgabe H3 (5+1+1+2 Punkte)

Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg derart, dass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

a) Zeigen Sie, dass die Weglängenfunktion $s : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$ eine streng monoton wachsende, zweimal stetig differenzierbare Bijektion von $[a, b]$ auf $[0, L(\gamma)]$ ist mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, L(\gamma)] \to [a, b]$.

b) Zeigen Sie, dass der "durch Umparametrisieren der Weglänge"entstandene Weg

$$\nu : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad \nu(r) := \gamma(s^{-1}(r))$$

folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\|\nu'(r)\|_2 = 1$ für alle $r \in [0, L(\gamma)]$,

(ii) $L(\nu|_{[0,r]}) = r$ für alle $r \in (0, L(\gamma)]$,

(iii) Für jedes $r \in [0, L(\gamma)]$ sind die Vektoren $\nu'(r)$ und $\nu''(r)$ zueinander orthogonal.