Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
17.12.2009

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

a) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

b) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen?

c) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

d) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (2x^2 + 1)(y^2 + 1).$$

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Ist die Gleichung

$$x^y - y^x = 0$$

in der Nähe von (e, e) bzw. $(2, 4)$ nach x bzw. y auflösbar?
Anleitung für den Fall (e, e)**:** Studieren Sie die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto y \log x - x \log y$$

auf Kreisen

$$K_r := \{(x, y) \mid (x, y) = (e, e) + r(\cos t, \sin t)\}$$

für $r > 0$ und achten Sie auf das Vorzeichen.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es seien $p, q \in (0, \infty)$ fest gewählt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie das Minimum von

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := xy = 1.$$

Folgeren Sie hieraus auch $\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Verwenden Sie die Lagrange'schen Multiplikatoren, um ein mögliches Maximum der Funktion

$$f(x_1, ..., x_n) := \sin(x_1) + ... + \sin(x_n)$$

für $x_1 + ... + x_n = 2\pi$, $0 \leq x_j \leq \pi$, $j = 1, ..., n$ zu bestimmen. Ausnahmsweise soll hier eine anschauliche Begründung, dass das Maximum nicht in einem Punkt des Randes von $[0, \pi]^n$ angenommen wird, genügen. Deuten Sie hierzu $f(x_1, ..., x_n)$ geometrisch.

Hinweis: Betrachten Sie die Punkte $e^{i \sum_{j=1}^{k} x_j}$, $k = 1, \ldots, n$ in $\mathbb{C}$.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!