Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
16.10.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das untere und obere Integral und entscheiden Sie, ob die Funktion Riemann-integrierbar ist. Falls dies der Fall ist, so bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x = 0 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q};\, p, q \,-\, \text{teilerfremd} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe G2

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle Punkte $x \in [a,b]$, in denen die Funktion stetig ist.

(b) Folgt auch, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$?

Aufgabe G3

Seien $f : [a,b] \to [c,d]$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Kann man daraus schließen, dass die Funktion $g \circ f$ auch Riemann-integrierbar ist?

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (wobei $a < b$).

(a) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.

(b) Bleibt dieser Schluß richtig, wenn f zwar Riemann-integrierbar, aber unstetig ist?

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Berechnen Sie das Riemann–Integral

$$\int_0^b \sin(x)dx,$$

indem Sie in folgenden Schritten vorgehen:

a) Begründen Sie, warum das Riemann–Integral existieren muss.

b) Wählen Sie die Zerlegung $Z_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $x_k := k\frac{b}{n}$ und den Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\xi_0^{(n)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n)})$ mit $\xi_k^{(n)} := x_k$. Vereinfachen Sie den Ausdruck der zugehörigen Riemann–Summe S_n (für geeignetes n) mit Hilfe von

$$\cos\left((k - \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k + \frac{1}{2})x\right) = 2\sin(kx) \cdot \sin(\frac{x}{2}).$$

c) Bestimmen Sie nun den Wert des Riemann–Integrals.

Aufgabe H3 (8 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion derart, daß

$$\int_a^b f(x) \cdot \phi(x)\, dx = 0$$

für jede stetige Funktion $\phi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $f(x) = 0$ für fast alle x.