

**VORLESUNG  
RIEMANNSCHE GEOMETRIE  
WS 09/10**

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

INHALTSVERZEICHNIS

<b>Literatur</b>	iv
<b>Einführung</b>	v
Überblick und Motivation	vi
Die Themen der Vorlesung	vi
Anwendungen von Riemannscher Geometrie	vi
Motivation: Innere Geometrie	vii
<b>Teil 1. Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen</b>	1
1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1. Etwas Topologie	1
1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	2
1.3. Differenzierbare Abbildungen	4
2. Tangentialraum	5
2.1. Tangentialraum in einem Punkt	5
2.2. Lie-Ableitung	6
2.3. Tangentialbündel	7
2.4. Differential	9
3. Vektorfelder und Kommutator	10
3.1. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten	10
3.2. Vektorfelder als Derivationen	11
3.3. Lie-Klammer zweier Vektorfelder	12
3.4. Übungsaufgaben	14
<b>Teil 2. Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Zusammenhänge</b>	16
1. Metriken	16
1.1. Semi-Riemannsche Metriken	16

1.2. Länge, Winkel, Volumen	17
1.3. Konforme Metriken	18
1.4. Etwas Physik	19
1.5. Isometrien	20
1.6. Quotienten	21
1.7. Existenz Riemannscher Metriken	23
1.8. Übungsaufgaben	24
2. Parallelität und kovariante Ableitung für immersierte Flächen	26
2.1. Parallelverschiebung am Beispiel	26
2.2. Parallelverschiebung: Definition und Eigenschaften	27
2.3. Parallelität als Differentialgleichung	28
2.4. Kovariante Ableitung längs Kurven	30
2.5. Kovariante Ableitung von Vektorfeldern	31
2.6. Übungsaufgaben	33
3. Zusammenhänge	35
3.1. Affine Zusammenhänge	35
3.2. Parallelverschiebung eines affinen Zusammenhangs	36
3.3. Symmetrie und Verträglichkeit von Zusammenhängen	38
3.4. Levi-Civita-Zusammenhang und Koszul-Formel	39
3.5. Übungsaufgaben	41
4. Geodätische und Exponentialabbildung	42
4.1. Geodätische	43
4.2. Exponentialabbildung	45
4.3. Erste Variation der Bogenlänge	48
4.4. Stückweise differenzierbare Kurven	51
4.5. Kürzeste	53
4.6. Gauß-Lemma	53
4.7. Übungsaufgaben	55
5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume	58
5.1. Riemannsche Distanz	58
5.2. Radiale Geodätische sind Kürzeste	60
5.3. Metrik	62
5.4. Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten	62
5.5. Übungsaufgaben	65
6. Hyperbolischer Raum	66
6.1. Möbiustransformationen von $\mathbb{C}$ und oberer Halbebene	67

6.2. Oberes Halbebenen-Modell der hyperbolischen Ebene	69
6.3. Oberes Halbraum-Modell des hyperbolischen Raums	73
6.4. Übungsaufgaben	74
<b>Teil 3. Krümmung</b>	76
1. Krümmungsbegriffe	76
1.1. Gauß-Krümmung von Flächen	76
1.2. Krümmungstensor	78
1.3. Schnittkrümmung	80
1.4. Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung	84
1.5. Geometrische Eigenschaften des Krümmungstensors	86
1.6. Tensorfelder	88
1.7. Übungsaufgaben	92
2. Zweite Variation und Anwendungen	94
2.1. Zweite Variation der Bogenlänge	95
2.2. Satz von Myers	97
2.3. Übungsaufgaben	99
3. Jacobifelder	100
3.1. Existenz	100
3.2. Krümmungsberechnung für $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{H}^n$	102
3.3. Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung oder Dimension 2	103
3.4. Übungsaufgaben	106
4. Konjugierte Punkte	107
4.1. Kritische Punkte von $d \exp$	107
4.2. Überlagerungen	109
4.3. Konjugierte Punkte und Kürzeste	110
4.4. Konjugierte Punkte unter Krümmungsschranken	111
4.5. Satz von Hadamard	111
4.6. Kurzer Ausblick	114
Index	115

**Literatur**

- (i) Do Carmo [dC]: Riemannian Geometry (didaktisch gut, Kapitel 1 ist allerdings nicht gut durchgearbeitet, und Karten gehen in umgekehrter Richtung), Birkhäuser 1992
- (ii) Gallot, Hulin, Lafontaine [GHL]: Riemannian Geometry, 3. Aufl., Springer 04 (viele Beispiele, gibt guten Überblick ohne alles in Tiefe zu behandeln)
- (iii) O'Neill: Semi-Riemannian Geometry (Das einzige Buch unserer Liste, das den semi-Riemannschen Fall behandelt. Etwas höheres Niveau, aber gut geschrieben.)
- (iv) Petersen: Riemannian Geometry (Ein Buch auf höherem Niveau mit vielen interessanten Themen.) 2nd ed. Springer 06
- (v) Sharpe: Differential Geometry (Behandelt den Differentialformenkalkül.)
- (vi) Spivak: Differential Geometry, 5 Bände, Publish or Perish 1979
- (vii) Anderson, J.W.: Hyperbolic geometry, 2nd edition, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2005.
- (viii) Benedetti, Petronio: Hyperbolic geometry, Springer 1992, 2003

## Einführung

Diese Vorlesung führt in die Riemannsche Differentialgeometrie ein. Sie wendete sich an Studenten der Mathematik und Physik ab dem 5. Semester. Sie versucht, die grundlegenden Konzepte von Metrik, Geodätischen und Krümmung umfassend einzuführen. Die Sätze über Krümmung und Topologie von Myers und Hadamard stellen dabei die Ziele der Veranstaltung dar.

Die vorliegende Vorlesung ist im Prinzip ohne Wissen über klassische Differentialgeometrie zugänglich, allerdings dürften viele Dinge ohne die Vorstellung von konkreten Flächen etwas in der Luft hängen. Da ich auch zugleich eine Vorlesung über differenzierbare Mannigfaltigkeiten gehalten habe, habe ich versucht, den entsprechenden Stoff des ersten Kapitels hier möglichst knapp darzustellen. Die nötigen topologischen Begriffe führe ich ein.

Grundlage des Manuskripts sind Vorlesungen, die ich vor einigen Jahren in Bonn und hier in Darmstadt gehalten habe. Wegen der Anwendungen in der Physik habe ich den semi-Riemannschen Fall behandelt. Den hyperbolischen Raum habe ich diesmal im Halbebene-Modell behandelt.

Die Übungsaufgaben, die in diesem Manuskript enthalten sind, wurden von Julia Plehnert gestellt. Wir haben viele Aufgaben erneut gestellt, die Steffen Fröhlich geschrieben hat.

Ich bedanke mich bei Dominik Kremer für die Mitteilung zahlreicher Korrekturen.

Darmstadt, Februar und April 2010

## ÜBERBLICK UND MOTIVATION

**Die Themen der Vorlesung.** Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten mit Längenelement, also Räume, auf denen man Längen messen kann. Im einzelnen behandeln wir die folgenden Themen.

1. Mannigfaltigkeiten: Der differenzierbare Hintergrund – ohne Längen. Er ist das Ergebnis einer langen Entwicklung, so dass der Formalismus und Intuition nicht leicht zu vereinen sind. Dennoch steckt eine anschauliche Idee hinter dem Begriff Mannigfaltigkeit: Er bezeichnet Räume, die lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussehen.

2. Riemannsche Metriken und kovariante Ableitung: Der erste Begriff bezeichnet die Wahl von Längen, wie von der Gramschen Determinante bekannt geht es hier um die abstrakte Erklärung einer ersten Fundamentalform. Der Begriff der Parallelverschiebung ist schwerer zu verstehen. Die Parallelverschiebung werden wir längs Kurven definieren, und tatsächlich hängt das Ergebnis, also die Parallelverschiebung eines Vektors von einem Punkt zu einem anderen, vom gewählten Weg ab. Dieser geometrische Begriff wird kodiert in einem Ableitungsbegriff, der die Richtungsableitung verallgemeinert, und kovariante Ableitung heißt. Parallelverschiebung und kovariante Ableitungen sind durch die Angabe von Längen bestimmt.

3. Krümmung: Der entscheidende Begriff. Bei Krümmung 0 ist Parallelverschiebung von Vektoren lokal wohldefiniert, im allgemeinen misst die Krümmung, wie stark Parallelverschiebung von gewählten Wegen abhängt. Der Begriff ist zweidimensional und entspricht der Gauß-Krümmung von Flächen.

4. Beispiele: Die Standardräume mit konstanter Krümmung sind der  $\mathbb{R}^n$  mit Krümmung 0, die Sphären mit Krümmung  $+1$  und der hyperbolische Raum mit Krümmung  $-1$ . Die Sphären sind Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , aber der hyperbolische Raum muss abstrakt, als Riemannsche Mannigfaltigkeit, definiert werden. Dieser Raum hat in der historischen Entwicklung eine prominente Rolle gespielt, weil er das Parallelenaxiom der axiomatischen Geometrie widerlegte, und damit eine Frage, die über 2000 Jahre offen war, beantwortete. Ein weiteres Beispiel wird erst im Seminar behandelt: Bei homogenen 3-Mannigfaltigkeiten sieht die Geometrie zwar in jedem Punkt gleich aus, aber diese Räume sind nicht unbedingt isotrop, d.h. in verschiedenen Richtungen hat man unterschiedliche Geometrie.

**Anwendungen von Riemannscher Geometrie.** 1. Allgemeine Relativitätstheorie: Durch Masse krümmt sich der Raum, das Licht läuft entlang kürzester Kurven in der

vierdimensionalen Raumzeit. In welchem Raum wir leben, und wie er (bzw. die Raumzeit) sich verändert, ist nicht klar. Man benötigt hierfür eine geringfügige Erweiterung der Riemannschen Geometrie, den sogenannten Semi-Riemannschen Fall.

2. Topologie: Um die Topologie einer Mannigfaltigkeit zu verstehen, kann es helfen, als Zusatzstruktur Längen einzuführen. Man kann dann untersuchen, wie die Krümmung die Topologie beeinflusst. Hier ist ein Beispiel. Unter den Standardräumen sind nur die Sphären kompakt. Wir werden sehen, dass man auch bei positiver, von 0 weg beschränkter, Krümmung die Kompaktheit nachweisen kann. Ein Beispiel, das jüngst Furore gemacht hat, ist die Poincaré-Vermutung, also die Tatsache, dass jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit, die einfach zusammenhängend ist ( $\pi_1$  ist trivial) sogar homöomorph zu  $\mathbb{S}^3$  ist. Sie wurde von Perelman bewiesen, wofür er die Fields-Medaille erhielt. Perelman versieht die Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik, und ändert diese Metrik kontinuierlich, indem die Mannigfaltigkeit so verformt wird, dass sich Krümmungsgegensätze verringern. Hätte man einen umgebenden Raum, so würde man sagen, sie fließt in Richtung ihrer Normalen, dort wo die Krümmung groß ist. Dies sorgt im Endzustand für konstante Krümmung, womit die kompakte Mannigfaltigkeit als eine topologische  $\mathbb{S}^3$  identifiziert ist. Das Problem bei diesem Zugang sind Singularitäten, die sich jederzeit ausbilden können.

3. Warum interessieren mich selbst Riemannsche Mannigfaltigkeiten? Ich bin an Flächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten (meist mit Dimension 3) interessiert. An die Vorlesung wird sich eine Vorlesung über Flächen konstanter mittlerer Krümmung anschließen. Dies ist einerseits ein neues Thema, das als Voraussetzung die Vorlesung Differentialgeometrie erfordern wird, andererseits bin ich an solchen Flächen in allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten interessiert. Ein Seminar ist für das Sommersemester geplant, und verschiedene Diplom- oder Masterarbeitsthemen werden die Themen in unterschiedlicher Kombination enthalten.

**Motivation: Innere Geometrie.** Wir kennen bereits Untermannigfaltigkeiten  $M^n$  des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Um zu erklären, warum man auch Untermannigfaltigkeiten ohne einen sie umgebenden Raum behandeln möchte, gebe ich Beispiele von Eigenschaften der sogenannten *inneren Geometrie*, für die der umgebende Raum irrelevant ist.

1. Längen von Kurven und Inhalte von Untermannigfaltigkeiten. Um sie zu definieren, reicht es, die Gramsche Determinante bzw. die erste Fundamentalform  $g$  zu kennen; durch welche spezielle Parametrisierung sie zustande gekommen ist, ist egal. Man muss hierbei nur an die Verformungen abwickelbarer Flächen denken, die  $g$  gleich lassen, obwohl sich die Fläche ändert (beispielsweise Zylinder und Ebene).

2. Ganz konkret kann man z.B. kürzeste Kurven (Geodätische) auf einer abwickelbaren Fläche untersuchen. Es sei beispielsweise  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  ein Zylinder.

Wir behaupten: Kürzeste Wege in  $Z$  zwischen zwei Punkten von  $Z$  sind immer Teilstücke von Helices  $c(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Beweis: Wickle Zylinder ab in die Ebene. Dies ändert Längen von Kurven nicht. Tatsache: In der Ebene sind aber nur Geraden kürzeste.  $\implies$  Kürzester Weg auf Zylinder rollt auf eine Gerade ab. Die Urbilder von Geraden sind aber Helices.

Wir beweisen noch die benutzte Tatsache: In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  liegen kürzeste Wege zwischen zwei Punkten immer in Geraden.

Nach Drehung und Translation, die Längen invariant lassen, genügt es zu zeigen, die kürzeste Verbindung von  $(0, 0)$  nach  $(\ell, 0)$  ist eine Gerade. Sei  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  differenzierbare Kurve mit  $c(0) = (0, 0)$  und  $c(1) = (\ell, 0)$  für  $\ell > 0$ . Dann ist

$$\text{Länge}(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2} dt \geq \int_0^1 |c_1'| dt \geq \int_0^1 c_1' dt \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} c_1(1) - c_1(0) = \ell.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $c_2' \equiv 0$  und  $c_1' \geq 0$ .

Diese Rechnung direkt auf dem Zylinder durchzuführen, wäre unnötig unangenehm, denn man müsste die Integralabschätzung unter der zusätzlichen Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$  führen. Es ist also gut von der komplizierten Einbettung in den umgebenden Raum abzusehen, und im Rahmen der inneren Geometrie zu rechnen.

3. Als eine weitere Motivation betrachten wir noch eine Quotientenmenge, und zwar den *flachen Torus*  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Er ist nicht als Teilmenge eines  $\mathbb{R}^k$  gegeben. Er lässt sich auch nicht längentreu als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  darstellen. Wir müssen nach  $\mathbb{R}^4$  gehen, um die längentreue Abbildung  $(s, t) \mapsto (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$  zu definieren. (Übung?)



1. Vorlesung, Dienstag 12.10.09

---

**Teil 1. Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen**

## 1. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

1.1. **Etwas Topologie.** Untermannigfaltigkeiten  $M$  kann man durch eine Menge von Karten

$$\{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, U_\alpha \subset M \subset \mathbb{R}^{n+k}, \alpha \in A\},$$

definieren, die Homöomorphismen auf ihr Bild sind. Hierbei ist  $A$  eine Indexmenge. Entsprechendes wollen wir nun für abstrakte Mannigfaltigkeiten fordern. Dazu müssen wir aber zuerst spezifizieren, welchen Typ die Menge  $M$  haben soll.

$M$  heisst *topologischer Raum*, wenn es ein System offener Mengen  $\mathcal{O}$  gibt, so dass:

- beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen in  $\mathcal{O}$  wieder in  $\mathcal{O}$  liegen,
- so dass zu  $\mathcal{O}$  die leere Menge und ganz  $M$  gehören.

Stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen werden dann dadurch erklärt, dass die Urbilder offener Mengen offen sind und Kompaktheit ist durch die Überdeckungseigenschaft definiert.

Metrische Räume  $M$  sind ein Beispiel topologischer Räume. Eine Teilmenge  $U \subset M$  ist genau dann ein Element von  $\mathcal{O}$ , wenn es zu jedem Punkt  $p \in U$  einen Abstandsball  $\{q \in M : d(p, q) < \varepsilon(p)\}$  gibt, der ganz in  $U$  liegt. Prüfen Sie die genannten Eigenschaften bitte nach.

Ein topologischer Raum  $M$  heisst

(i) *Hausdorffsch*, wenn je zwei verschiedene Punkte auch disjunkte offene Umgebungen besitzen.

(ii) Er erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, d.h. es gibt abzählbar viele offene Mengen  $\{V_\beta\} \subset \mathcal{O}$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $p \in M$  und jede Umgebung  $U$  von  $p$  eine Menge  $V_\beta$  mit  $p \in V_\beta \subset U$  existiert. Diese Eigenschaft wird uns eine Partition der 1 erlauben.

(iii) Er heißt *lokal euklidisch von Dimension  $n$* , wenn jeder Punkt von  $M$  eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Genauer heißt dies: Für jedes  $p \in M$  existieren offene Mengen  $U \subset M$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$ , und ein Homöomorphismus  $x: U \rightarrow \Omega$ . Man nennt  $(x, U)$  oder kurz  $x$  eine *Karte* von  $M$  um  $p$ , manchmal auch *lokale Koordinaten*.

2. Vorlesung, Mittwoch 14.10.09

---

**Definition.** Eine *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension  $n$  ist ein Hausdorffscher Raum  $M$ , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und lokal euklidisch von Dimension  $n$  ist.

Jede Karte respektiert also die durch die Topologien von  $M$  und  $\mathbb{R}^n$  gegebenen offenen Mengen, und Kartenwechsel der Form  $y \circ x^{-1}$  sind, wo definiert, Homöomorphismen zwischen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ .

Eine *Überdeckung* von  $M$  ist eine Familie offener Mengen  $\{U_\alpha \subset M : \alpha \in A\}$  für die gilt  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ . Eine Menge  $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$  von Karten, deren Definitionsgebiete  $M$  überdecken, nennt man einen *Atlas*.

*Bemerkung.* Alle topologischen Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten werden, sind metrische Räume. Metrische Räume sind immer Hausdorffsch (Beweis: Übung).

**1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.** Anders als beim Stetigkeitsbegriff können wir für den Differenzierbarkeitsbegriff auf topologischen Mannigfaltigkeiten nicht eine vorgegebene differenzierbare Struktur benutzen, sondern wir müssen sie erst erklären. Wir erklären Differenzierbarkeit dadurch, dass wir sie durch Karten vom Urbild aus auf  $M$  induzieren. Dies wird aber nur dann unabhängig von der gewählten Karte, wenn alle Kartenwechsel differenzierbar sind.

**Definition.** (i) Zwei Karten  $(x, U)$  und  $(y, V)$  heißen (*differenzierbar*) *verträglich*, wenn der *Kartenwechsel*

$$y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus ist.

(ii) Ein Atlas  $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$  heißt *differenzierbarer Atlas*, wenn für alle  $\alpha, \beta \in A$  die *Kartenwechsel*  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  differenzierbar verträglich sind.

(iii) Ist  $\mathcal{A}$  Atlas, so ist  $\mathcal{S} \supset \mathcal{A}$  ein *maximaler differenzierbarer Atlas* oder eine *differenzierbare Struktur*, wenn  $\mathcal{S}$  alle zu allen Karten von  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten enthält.

Beachten Sie, dass zwei Karten  $(x, U)$  und  $(y, V)$  immer verträglich sind, falls  $U \cap V = \emptyset$ .

Anschaulich gesprochen legt eine differenzierbare Struktur fest, welche stetigen Kurven auf  $M$  differenzierbar sind, d.h. was man als gerade, und was man als Ecke betrachten möchte.

**Satz 1.** *Eine differenzierbare Struktur  $\mathcal{S}$  ist Atlas, und sie wird eindeutig durch  $\mathcal{A}$  bestimmt.*

*Beweis.* Der Beweis wird über folgende Behauptung geführt: Ist sowohl die Karte  $(x, U)$  wie die Karte  $(y, V)$  verträglich zu  $\mathcal{A}$ , so sind  $x$  und  $y$  auch miteinander verträglich.

Um dies zu zeigen, betrachten wir für ein beliebiges  $p \in M$  zwei Karten  $(x, U)$ ,  $(y, V)$ , so dass  $p \in U \cap V$ . Da  $\mathcal{A}$  Atlas ist, gibt es eine Karte  $(x_\alpha, U_\alpha)$  um  $p$ . Es gilt lokal:

$$x \circ y^{-1} = \underbrace{\underbrace{(x \circ x_\alpha^{-1})}_{\text{diff.bar, da vertr. zu } \mathcal{A}} \circ \underbrace{(x_\alpha \circ y^{-1})}_{y \text{ vertr. zu } \mathcal{A}}}_{\text{diff.bar laut Kettenregel}}$$

□

*Beispiele.* 1. Durch  $(\text{id}, \mathbb{R})$  und  $(x^3, \mathbb{R})$  werden zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}$  gegeben.

2. Zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf der offenen Kreisscheibe: Erstens die Standardstruktur (Karte =  $\text{id}$ ), zweitens eine Struktur, die durch eine auf dem offenen Quadrat definierte Karte, die 1-homogon ist, definiert wird.

**Definition.** Eine (*differenzierbare*) *Mannigfaltigkeit* ist eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer differenzierbaren Struktur  $\mathcal{S}$ . Wir sagen von nun an *Karte* zu einer Karte der differenzierbaren Struktur  $\mathcal{S}$ .

Dabei wollen wir unter *differenzierbar* stets  $C^\infty$  verstehen. Wenn man alternativ nur  $k$ -fache Differenzierbarkeit voraussetzt, so erhält man eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit; setzt man, stärker, analytisch voraus, so erhält man eine analytische oder  $C^\omega$ -Mannigfaltigkeit.

*Beispiele.* 1. Trivial:  $\mathbb{R}^n$  mit einer Karte  $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$ . Die differenzierbare Struktur ist  $\mathcal{S} = \{(f, U) : U \text{ offen, } f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Diffeomorphismus auf Bild}\}$ .

2. Jede offene zusammenhängende Teilmenge  $O$  in einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist selbst Mannigfaltigkeit. Dabei ist  $\mathcal{O} = \{\text{offene Teilmengen von } O\}$ , die sogenannte *Relativtopologie*. Die Struktur  $\mathcal{S}$  wird durch diejenigen Karten  $(x, U)$  der differenzierbaren Struktur von  $M$  gegeben, deren Bilder  $x(U)$  offene Teilmengen von  $O$  sind.

3. *Sphären*  $\mathbb{S}^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 = 1\}$ . Mithilfe der sogenannten stereographischen Projektion kann man zwei Karten definieren.

4. *Projektive Räume*  $\mathbb{R}P^n$  oder  $\mathbb{C}P^n$ .

*Bemerkungen.* 1. Wie kann man überhaupt Mannigfaltigkeiten konstruieren? Wie in den Beispielen sind Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  eine Möglichkeit, insbesondere Graphen von Funktionen und Niveaumengen. Weiter kann man Produktmannigfaltigkeiten  $M \times N$  nehmen (Übung) und, wichtiger, Quotientenmannigfaltigkeiten (später, Übungen: Torus?).

2. Andere gebräuchliche Typen von Mannigfaltigkeiten erhält man, wenn man die geforderte Differenzierbarkeit von Kartenwechseln durch andere (stärkere oder schwächere) Eigenschaften ersetzt:

<i>Disziplin</i>	<i>Mannigfaltigkeitstyp</i>	<i>Kartenwechsel</i>
Topologie	topologische Mannigfaltigkeit	Homöomorphismen
Differentialtopologie	diff.bare Mannigfaltigkeit	Diffeomorphismen
2d komplexe Analysis	Riemannsche Flächen	winkeltreue, biholomorphe, Diffeo.men
Differentialgeometrie	Riemannsche Mannigfaltigkeit	längentreue Diffeo.men (Isometrien)

**1.3. Differenzierbare Abbildungen.** Wir erklären die Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, indem wir den Umweg der Komposition mit Karten nehmen.

**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann heißt  $f: M \rightarrow N$  *differenzierbar* in  $p \in M$ , falls  $y \circ f \circ x^{-1}$  differenzierbar in  $p$  ist, wobei  $x: U \rightarrow \Omega_1$  eine Karte von  $M$  um  $p$  ist und  $y: V \rightarrow \Omega_2$  eine Karte von  $N$  um  $f(p)$ .

Da Kartenwechsel differenzierbar sind, ist unsere Definition unabhängig von den gewählten Karten: Bezüglich anderer Karten  $\tilde{x}$  um  $p$  und  $\tilde{y}$  um  $f(p)$  kann man (auf geeigneten offenen Mengen) schreiben:

$$\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} = (\tilde{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \tilde{x}^{-1})$$

Da die äußeren beiden Abbildungen als Kartenwechsel differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel die Differenzierbarkeit von  $\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}$  und  $(y \circ f \circ x^{-1})$  äquivalent.

Analog zeigt man, dass Differenzierbarkeit unter der Komposition von Abbildungen erhalten bleibt: In diesem Fall schreibt man  $z \circ f \circ g \circ x^{-1} = (z \circ f \circ y^{-1}) \circ (y \circ g \circ x^{-1})$  und benutzt die Kettenregel.

*Beispiele.* 1. Trivial: Die Identität auf  $M$  ist differenzierbar (denn Kartenwechsel von  $M$  sind differenzierbar)

2. Wir wollen  $\mathbb{R}^n$  immer mit der differenzierbaren Struktur betrachten, die der Atlas  $(\mathbb{R}^n, \text{id})$  erzeugt. Dann wird jede Karte  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{A})$  zu einer differenzierbaren Abbildung, denn für alle  $x_\beta \in \mathcal{A}$  ist die Komposition  $\text{id} \circ x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$  als ein Kartenwechsel differenzierbar.

**Definition.** Ein Homöomorphismus  $f: M \rightarrow N$  zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Diffeomorphismus*, wenn  $f$  und  $f^{-1}$  differenzierbar sind.

Ist  $M$  diffeomorph zu  $N$ , so gilt  $\dim M = \dim N$  (warum?).

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{R}^n$  und  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  sind mittels  $x \mapsto \frac{x}{|x|} \operatorname{arctanh} |x|$  diffeomorph.

2.  $T^2$  und Rotationstorus sind diffeomorph (vermittelt?).

3. Ist  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$  Karte, so ist auch  $x_\alpha^{-1}$  differenzierbar, denn  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} \circ (\text{id}|_{\Omega_\alpha})^{-1}$  ist als Kartenwechsel differenzierbar. Also ist jede Karte sogar Diffeomorphismus auf ihr Bild.

Übung: Zeigen Sie, dass  $M$  in jedem Punkt dieselbe Dimension hat; benutzen Sie, dass  $M$  wegzusammenhängend ist.

3. Vorlesung, Dienstag 20.10.09

---

## 2. TANGENTIALRAUM

**2.1. Tangentialraum in einem Punkt.** Im Euklidischen stellt für jeden Punkt  $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  der Raum  $\mathbb{R}^n$  den Tangentialraum dar. Wenn wir einen Tangentialraum  $T_p M$  einer abstrakten Mannigfaltigkeit erklären wollen, so haben wir das Problem, dass ein Tangentialvektor von der gewählten Karte abhängt. Aus diesem Grunde müssen wir die Tangentialvektoren bezüglich verschiedener Karten identifizieren. Technisch leistet das die folgende Äquivalenzrelation:

**Satz 2.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(x, U), (y, V)$  zwei Karten um  $p \in M$ . Dann erklärt

$$(1) \quad ((x, U), \xi) \sim ((y, V), \eta) \quad :\Leftrightarrow \quad \eta = d(y \circ x^{-1})_{x(p)} \xi$$

eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* Die Reflexivität ist klar, Symmetrie folgt aus

$$\eta = d(y \circ x^{-1}) \xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi = (d(y \circ x^{-1}))^{-1} \eta = d((y \circ x^{-1})^{-1}) \eta = d(x \circ y^{-1}) \eta.$$

Woraus folgt die Transitivität? □

**Definition.** Der Tangentialraum von  $M$  in  $p$  ist der Raum der Äquivalenzklassen

$$T_p M = \{(x, U) \in \mathcal{S} : p \in U\} \times \mathbb{R}^n / \sim.$$

Ein Tangentialvektor  $v \in T_p M$  wird durch  $((x, U), \xi)$  repräsentiert. Wir nennen  $\xi$  den *Hauptteil* des Tangentialvektors  $v$  bezüglich der Karte  $x$ .

In Matrixschreibweise lautet (1)

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y \circ x^{-1})^j}{\partial u^i}(x(p)) \xi^i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Physiker sagen daher: Tangentialvektoren transformieren sich mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels. Tatsächlich haben wir hier das Transformationsverhalten einfach zur Definition gemacht. (Wie immer in der Mathematik interessiert uns nicht, was ein Objekt ist, sondern was man damit macht!)

Die Vektorraumstruktur der Hauptteile macht  $T_p M$  zu einem Vektorraum:

**Satz 3.** Auf  $T_p M$  gibt es eine Vektorraumstruktur, so dass  $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$  für jede Karte  $x$  Isomorphismus von  $n$ -dimensionalen Vektorräumen ist.

*Beweis.* Erklären wir die Vektorraumstruktur auf  $T_p M$  bzgl. einer Karte  $(x, U)$  um  $p$ , so müssen wir zeigen, dass jede andere Karte  $(y, V)$  um  $p$  dieselbe Struktur ergibt. Dies liegt daran, dass  $d(y \circ x^{-1})_{x(p)}$  linear ist.

Explizit: Gilt

$$((x, U), \xi_i) \sim ((y, V), \eta_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \quad \text{also } \eta_i = d(y \circ x^{-1})\xi_i,$$

so folgt

$$\lambda\eta_1 + \eta_2 = d(y \circ x^{-1})(\lambda\xi_1 + \xi_2) \quad \text{also } ((x, U), \lambda\xi_1 + \xi_2) \sim ((y, V), \lambda\eta_1 + \eta_2).$$

Ferner ist  $d(y \circ x^{-1})_{x(p)}$  bijektiv und daher  $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$  Isomorphismus.  $\square$

Betrachten wir die Basis  $(b_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, b_n = (0, \dots, 0, 1))$  von  $\mathbb{R}^n$ . Wir bezeichnen die dadurch gegebenen Äquivalenzklassen  $e_i = e_i(p) := [((x, U), b_i)]_{i=1, \dots, n}$  als *Standardbasis* von  $T_p M$  bzgl. der Karte  $(x, U)$ . Bezüglich einer anderen Karte  $(y, V)$  ergibt sich im allgemeinen eine andere Standardbasis  $f_i := [((y, V), b_i)]$  von  $T_p M$ , denn  $(d(y \circ x^{-1})e_1, \dots, d(y \circ x^{-1})e_n)$  ist in der Regel von  $(e_1, \dots, e_n)$  verschieden. Man sagt, auf dem Tangentialraum  $T_p M$  gibt es keine kanonische Basis, d.h. jede Basiswahl ist willkürlich oder kartenabhängig!

Für  $\mathbb{R}^n$  verwenden wir stets nur die eine Karte  $\text{id}$ , identifizieren Hauptteile  $\xi$  mit Tangentialvektoren  $v$ .

*Bemerkung.* Es gibt auch andere Wege, den Tangentialraum einzuführen.

1. Wir erinnern zuerst an den Tangentialraum  $T_p M$  an eine Untermannigfaltigkeit  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ : Dies ist derjenige  $n$ -dimensionale Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+k}$ , der aus sämtlichen Tangentialvektoren  $c'(0)$  von Kurven  $c$  in  $M$  durch den Punkt  $c(0) = p$  besteht. Ähnlich kann man auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten  $T_p M$  über Tangentialvektoren an Kurven einführen. Wegen der Beschreibung derselben Kurve in verschiedenen Karten bedeutet das aber auch, eine Äquivalenzrelation einzuführen, in diesem Fall zwischen Kurven durch denselben Punkt.

2. Man kann den Tangentialraum auch ohne Zuhilfenahme von Karten und Hauptteilen definieren, über sogenannte *Funktionskeime*. Ein Tangentialvektor ist dann ein linearer Differentialoperator auf diesen Keimen, der die Produktregel respektiert.

**2.2. Lie-Ableitung.** Wir ordnen jedem Tangentialvektor einer Mannigfaltigkeit eine Ableitung zu. Im Euklidischen entspricht dies der Richtungsableitung  $\partial_\xi f(p) = df_p(\xi)$  einer skalarwertigen Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir ersetzen jetzt  $\mathbb{R}^n$  durch eine Mannigfaltigkeit.

Die Menge der glatten Funktionen auf  $M$  sei  $\mathcal{D}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

**Definition.** Die *Lie-Ableitung* von  $f \in \mathcal{D}(M)$  im Punkt  $p \in M^n$  in Richtung  $v \in T_p M$  ist

$$(2) \quad \partial_v f(p) := \partial_\xi(f \circ x^{-1})(\rho) = d(f \circ x^{-1})_\rho(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u_i}(\rho) \in \mathbb{R},$$

wobei wieder  $v = [(x, U), \xi]$  und  $x(p) = \rho$ .

Andere gebräuchliche Bezeichnung für die Lie-Ableitung sind  $v(f)$  und  $L_v f$ .

Um zu zeigen, dass  $\partial_v f$  unabhängig von der Karte  $x$  definiert ist, beachten wir für  $\rho = x(p)$ ,  $\sigma = y(p)$  und  $v = [((x, U), \xi)] = [((y, V), \eta)] \in T_p M$ :

$$\begin{aligned} \partial_\eta(f \circ y^{-1})(\sigma) &= d(f \circ y^{-1})_\sigma(\eta) = d(f \circ y^{-1})_{(y \circ x^{-1})(\rho)}(d(y \circ x^{-1})_\rho(\xi)) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} d(f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})_\rho(\xi) = d(f \circ x^{-1})_\rho(\xi) = \partial_\xi(f \circ x^{-1})(\rho) \end{aligned}$$

Die Lie-Ableitung ist eine Operation mit den *derivativen* Eigenschaften  $\partial_\xi(cf + g) = c\partial_\xi f + \partial_\xi g$  (Linearität) und  $\partial_\xi(fg) = f\partial_\xi g + (\partial_\xi f)g$  (Produktregel).

Im Spezialfall, dass der Vektor ein Element der Standardbasis  $e_i$  bzgl. der Karte  $x$  ist, schreiben wir auch als Lie-Ableitung

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} := \partial_{e_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f := \partial_i(f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)},$$

bzw. entsprechend  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ; dabei haben wir mit  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$  die Ableitung nach der  $i$ -ten Variablen in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Mit dieser Notation kann man die Lie-Ableitung auf Mannigfaltigkeiten wörtlich wie die euklidische Richtungsableitung notieren:

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^n \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \Big|_p = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

**2.3. Tangentialbündel.** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , so ist der Tangentialraum in jedem Punkt  $p \in \Omega$  derselbe Raum  $\mathbb{R}^n$ . In einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  hat man aber bereits zu verschiedenen Fußpunkten  $p \in M$  verschiedene Untervektorräume  $T_p M$ . Z.B. gilt für  $\mathbb{S}^n$  dass  $T_p \mathbb{S}^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p \rangle = 0\}$ .

Es ist daher sinnvoll, Tangentialvektoren in der Form  $(p, v) = (\text{Fußpunkt}, \text{Vektor})$  anzugeben. Wir werden weiterhin festlegen müssen, wann ein Vektorfeld differenzierbar ist. Auch hierfür müssen wir die Vektorräume  $T_p M$  zusammen mit ihren Fußpunkten  $p$  behandeln.

Es sei  $(x_\alpha, U_\alpha)$  eine Karte und  $v = [(x_\alpha, U_\alpha), \xi_\alpha] \in T_p M$  ein Tangentialvektor. Auf der disjunkten Vereinigung der Tangentialräume definieren wir die Abbildung

$$(4) \quad y_\alpha: \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad y_\alpha(p, v) := (x_\alpha(p), \xi_\alpha),$$

und erklären sie zu einer Karte von  $TM$ :

**Satz 4.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\mathcal{A}_M = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ . Auf der Menge  $TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$  bestimmt dann

$$\mathcal{A}_{TM} := \left\{ (y_\alpha, \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M) : \alpha \in A \right\} \quad \text{mit } y_\alpha \text{ wie in (4)}$$

einen Atlas, der  $TM$  die Struktur einer  $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt, unabhängig vom gewählten Atlas  $\mathcal{A}_M$ .

Wir nennen die so erklärte Mannigfaltigkeit  $TM$  das *Tangentialbündel*.

*Beispiel.* Eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  erklärt eine Kurve  $\{(c(t), c'(t)) : t \in I\} \subset TM$ .

*Beweis.* Sicherlich überdeckt  $\mathcal{A}_{TM}$  die Menge  $TM$ . Wir können hier nur skizzieren, warum  $TM$  eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dazu wählen wir auf  $TM|U_\alpha := \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M$  eine Topologie, so dass  $y_\alpha$  Homöomorphismus wird, d.h. wir induzieren die Produkttopologie von  $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  auf  $TM|U_\alpha$ . Dies ergibt eine Basis der Topologie für  $TM$ .

Wir zeigen nun, dass je zwei Karten  $(y_\alpha, TM|U_\alpha)$  und  $(y_\beta, TM|U_\beta)$  verträglich sind. Sei dazu  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  und

$$(p, v) = \left( p, [(x_\alpha, U_\alpha), \xi_\alpha] \right) = \left( p, [(x_\beta, U_\beta), \xi_\beta] \right), \quad \text{d.h.} \quad \xi_\beta = d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})\xi_\alpha.$$

Setzen wir noch  $\rho := x_\alpha(p)$  so erhalten wir

$$(y_\beta \circ y_\alpha^{-1})(\rho, \xi_\alpha) = y_\beta(x_\alpha^{-1}(\rho), v) = ((x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\rho), \xi_\beta) = \left( (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\rho), d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\xi_\alpha) \right).$$

Die erste Komponente ist aber ein differenzierbarer Kartenwechsel und die zweite ein Differential einer glatten Funktion, also selbst glatt. Daher ist  $\mathcal{A}_{TM}$  ein Atlas und die differenzierbare Struktur unabhängig von den Karten von  $M$ .  $\square$

*Beispiel.* Das Tangentialbündel von  $S^1$  kann man als Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  deuten, d.h. es ist diffeomorph dazu.

*Ausblick.* Das Tangentialbündel ist Spezialfall eines *Vektorraumbündels*. Nach Definition ist das Tangentialbündel lokal jeweils ein Produkt, und zwar homöomorph zu  $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ . Jeder Kartenwechsel operiert auf dem  $\mathbb{R}^n$ -Faktor als Vektorraumisomorphismus, der differenzierbar vom Fußpunkt abhängt. Allerdings ist nicht jedes Tangentialbündel homöomorph zum Produkt  $M \times \mathbb{R}^n$ , denn in diesem Fall würde  $M$  ein nichtverschwindendes tangentiales Vektorfeld besitzen. Dies zeigt, dass  $TS^2$  kein Produkt ist, ebenso für Sphären gerader Dimension.



## 2.4. Differential.

**Definition.** Sei  $f: M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Das *Differential*  $df: TM \rightarrow TN$  ist die Abbildung

$$(5) \quad (p, v) = (p, [(x, U), \xi]) \mapsto df(p, v) = \left( f(p), [(y, V), d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \xi] \right),$$

wobei  $(x, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  und  $(y, V)$  eine Karte von  $N$  um  $f(p)$  ist. Wir benutzen auch die Notation  $df(p, v) = (f(p), df_p(v))$ , wobei wir schreiben  $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ .

Andere Bezeichnungen für  $df$  sind  $f_*$ ,  $f'$  oder  $Tf$ . Dass (5) unabhängig von den verwendeten Karten ist, folgt aus der Kettenregel (Übung).

*Beispiel.* Für eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  bildet das Differential z.B. ab:  $dc(0, 1) = (c(0), dc_0(1)) = (c(0), c'(0))$ . Dabei steht 0 für den Fußpunkt und 1 für einen Hauptteil in  $\mathbb{R}$ .

Das Differential in einem Punkt ordnet folgendermaßen Hauptteile einander zu:

$$(6) \quad \xi \mapsto \eta = d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \xi = \sum \xi^i \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})}{\partial u_i}(x(p)) =: \sum \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Dabei haben wir mit dem letzten Ausdruck eine Kurzschreibweise eingeführt, die die Formel auf Mannigfaltigkeiten mit ihrer euklidischen Version übereinstimmen läßt.

**Satz 5.** (i) Das Differential  $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  ist eine lineare Abbildung.

(ii) Es gilt die Kettenregel  $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$ .

*Proof.* Die Linearität ist klar, z.B. aus (6). Wegen der euklidischen Kettenregel gilt, an den richtigen Stellen,

$$d(z \circ f \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1} \circ y \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1}) \circ d(y \circ g \circ x^{-1}),$$

so dass  $d(f \circ g)_p$  tatsächlich durch  $df_{g(p)} \circ dg_p$  dargestellt wird.  $\square$

*Beispiel.* Betrachten wir eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  mit  $(c(0), c'(0)) = (p, v) \in TM$ . Ein Tangentialvektor an  $I \subset \mathbb{R}$  wäre dann notiert als  $(0, 1) \in TI$ , also als das Paar mit Fußpunkt  $t = 0$  und 1, die für  $1 \cdot \frac{d}{dt}$  steht. Dann ist  $dc(0, 1) = (c(0), c'(0))$  und damit, laut Kettenregel,

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} := d(f \circ c)(0, 1) = df(c(0), c'(0)) = (f(c(0)), df_{c(0)}c'(0)) = (f(p), df_p v).$$

Wir haben so eine Formel erhalten, die die aus dem Euklidischen bekannte Formel der Richtungsableitung  $\frac{d}{dt}(f \circ c) = dfv$  für  $c'(0) = v$  verallgemeinert.

Wir werden folgende Terminologie benötigen. Eine differenzierbare Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Immersion*, wenn das Differential  $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  für alle  $p \in M$  injektiv ist.

*Beispiel.* Eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  ist Immersion, wenn  $dc_t = c'(t) \neq 0$  gilt. Die differenzierbaren Kurven in  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t^2, t^3)$  und  $t \mapsto (t^3, t^3)$  sind also keine Immersionen.

Eine injektive Immersion, die Homöomorphismus auf ihr Bild ist, nennt man auch *Einbettung*. Ist speziell die Inklusion  $i: M \subset N \rightarrow N$ ,  $i(x) = x$ , eine Einbettung und  $M$  einfach zusammenhängend, so heißt  $M \subset N$  eine *Untermannigfaltigkeit* von  $N$ .

*Beispiele.* 1.  $e^{it}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist Immersion, aber nicht Einbettung.

2. Eine injektive Kurve  $c: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  habe einen Berührungspunkt  $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = c(\frac{1}{2})$ . Urbilder genügend kleiner offener Mengen um  $c(\frac{1}{2})$  bestehen aus zwei Zusammenhangskomponenten: eine Umgebung von 0 und eine von  $\frac{1}{2}$ . Homöomorphismen erhalten die Anzahl der Zusammenhangskomponenten; daher ist  $c$  kein Homöomorphismus auf sein Bild, also keine Einbettung.

4. Vorlesung, Mittwoch 21.10.09 \_\_\_\_\_

### 3. VEKTORFELDER UND KOMMUTATOR

Wir werden alle grundlegenden Konzepte der Riemannschen Geometrie mit Hilfe von Vektorfeldern definieren. Genauso wie zu Tangentialvektoren eine Richtungsableitung gehört, so führen auch Vektorfelder ein Doppelleben als Vektoren im Tangentialraum und als Differentialoperatoren erster Ordnung.

#### 3.1. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten.

**Definition.** Ein (*differenzierbares*) *Vektorfeld*  $X$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung

$$M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (p, X) \in T_p M.$$

Die Menge der Vektorfelder auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{V}(M)$ .

Weil also jedem  $p$  genau ein  $X$  zugeordnet wird, schreiben wir auch  $X(p)$  statt  $(p, X)$ . Bezüglich einer Karte  $x$  schreiben wir den repräsentierenden *Hauptteil* des Vektorfeldes nun als eine Funktion  $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Benutzen wir die Darstellung von (3), so ergibt dies

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) e_i(p).$$

Das Feld  $X$  ist differenzierbar genau dann, wenn für alle Karten sein Hauptteil  $p \mapsto \xi(p)$  differenzierbar ist.

*Beispiele.* 1. Für die Mannigfaltigkeit  $M = \mathbb{R}^n$  benutzen wir ausschließlich den Atlas  $\{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$ . Dann ist es sinnvoll, den einzigen Repräsentanten  $\xi(u)$  mit seinem Vektorfeld  $X(u)$  zu identifizieren, das heißt wir unterscheiden in diesem Fall nicht zwischen Hauptteilen und Vektorfeldern.

2. Für die Mannigfaltigkeit  $M = \mathbb{S}^n$  können wir Tangentialvektoren mit Tangentialvektoren des  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifizieren: Ein Vektorfeld ist eine Abbildung in das orthogonale Komplement jeden Punktes,

$$\mathcal{V}(\mathbb{S}^n) = \{X: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : \langle X(p), p \rangle = 0 \quad \forall p \in \mathbb{S}^n\}.$$

Ist die Dimension der Sphäre ungerade, d.h.  $n + 1 = 2k$ , so definieren wir durch 90-Grad Drehung von Koordinatenpaaren (bzw. Multiplikation mit  $i$  in  $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$ ) das Vektorfeld

$$V: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \quad \mapsto \quad V(p) = (-y_1, x_1, \dots, -y_k, x_k).$$

Es hat in  $\mathbb{R}^{n+1}$  die konstante Länge 1, insbesondere verschwindet es nirgendwo. Andererseits hat jedes Vektorfeld auf einer geraddimensionalen Sphäre eine Nullstelle (Satz vom gekämmten Igel).

**3.2. Vektorfelder als Derivationen.** Einem Vektorfeld  $X$  ordnen wir eine Lie-Ableitung in jedem  $p \in M$  zu:

$$\partial_X f(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(M),$$

wobei wir eine Karte  $x$  um  $p$  benutzt haben. So wie Tangentialvektoren ist auch die Funktion  $\partial_X f$  unabhängig von Karten definiert. Wir rechnen dies noch einmal nach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \partial_i(f \circ x^{-1})|_{x(p)} &= \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \partial_i(f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \sum_{i,j} \xi^i(p) \partial_j(f \circ y^{-1})|_{y(p)} \partial_i(y \circ x^{-1})^j|_{x(p)} = \sum_{j=1}^n \eta^j(p) \partial_j(f \circ y^{-1})|_{y(p)} \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise lautet dieselbe Rechnung:

$$\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \sum_{i,j} \xi^i \left( \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) = \sum_j \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

$\partial_X f$  ist ein Differentialoperator erster Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\partial_X: \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, die die Produktregel erfüllt.
2.  $\partial_X f(p)$  hängt nur von  $X$  in  $p$  ab, wenn auch von  $f$  in einer Umgebung von  $p$ .
3. Ist  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld, so gilt für die Richtungsableitung:  $df X = \partial_X f$ . Entsprechendes behaupten wir für die Lie-Ableitung auf Mannigfaltigkeiten:

$$(7) \quad df X = \partial_X f \quad \text{für } X \in \mathcal{V}(M), f \in \mathcal{D}(M).$$

Tatsächlich gilt nach Definition des Differential  $dfX = (f(p), [(id, \mathbb{R}), d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi]) \in T\mathbb{R}$ . Aber für die Bildmannigfaltigkeit  $\mathbb{R}$  brauchen wir keine Karte und wir identifizieren ohnehin  $T\mathbb{R}$  mit  $\mathbb{R}$ . Daher ergibt sich  $dfX = d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi$ . Doch das stimmt wörtlich mit der Definition (2) überein.

4. Oft werden wir benutzen: Für zwei Vektorfelder  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  gilt

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_X f \equiv \partial_Y f \quad \text{gilt für alle } f \in \mathcal{D}(M).$$

Es sei  $(x, U)$  eine Karte und  $f^i \in \mathcal{D}(U)$  definiert als  $i$ -te Koordinate des Kartenbilda,  $f^i(p) := (\pi^i \circ x)(p) = x^i(p)$ . Dann gilt für  $p$

$$\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p) \stackrel{\text{Def. der Lie-Abl.}}{=} \partial_j(f^i \circ x^{-1})|_{x(p)} = \partial_j \pi^i(x(p)) = \delta_j^i.$$

Für  $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j}$  folgt daraus  $\partial_X f^i = \xi^i$ . Gilt also  $\partial_X f^i = \partial_Y f^i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , so folgt bereits  $X_p = Y_p \quad \forall p \in U$ .

**3.3. Lie-Klammer zweier Vektorfelder.** Weil mit  $f \in \mathcal{D}(M)$  auch die Lie-Ableitung  $\partial_X f \in \mathcal{D}(M)$  ist, können wir Vektorfelder hintereinanderschalten. Dies ergibt eine zweite Richtungsableitung  $(\partial_X \partial_Y)(f) = \partial_X(\partial_Y f) \in \mathcal{D}(M)$ . Um den Differentialoperator  $\partial_X \partial_Y$  bezüglich einer Karte  $x$  darzustellen, seien  $\partial_X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $\partial_Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Es folgt

$$\partial_X(\partial_Y f) = \partial_X \left( \sum_j \eta^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_i \xi^i \left( \sum_j \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Dies zeigt, dass  $\partial_X \partial_Y$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, also keine Lie-Ableitung von  $f$  bzw. kein Vektorfeld. Erstaunlicherweise kann man daraus aber doch ein Vektorfeld gewinnen:

**Satz 6.** Seien  $X$  und  $Y$  Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann wird durch  $\partial_Z f := (\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X)f$  für alle  $f \in \mathcal{D}(M)$  ein Vektorfeld  $Z$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Es gilt lokal, bezüglich einer Karte  $(x, U)$ :

$$\partial_Y \partial_X f = \partial_Y \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_j \eta^j \left( \sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

Da nach dem Schwarzschen Lemma zweite Ableitungen vertauschen, folgt

$$(8) \quad \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = \sum_{i,k} \left( \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

Betrachten wir nun auf  $U \subset M$  das Vektorfeld  $Z$  mit Hauptteil  $\zeta^k := \sum_i (\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i})$ . Nun beschreibt (8) eine Wirkung auf alle  $f \in \mathcal{D}(M)$ , die wegen der Kettenregel unabhängig von der gewählten Karte definiert ist, zunächst auf  $U \subset M$ . Da dies genauso für beliebige Karten  $(y, V)$  gilt, ist die Wirkung von (8) auf  $f \in \mathcal{D}(M)$  unabhängig von gewählten

Karten, d.h. durch (8) wird global ein Vektorfeld  $Z$  auf ganz  $M$  eindeutig definiert. (Um sich zu überzeugen, sollten Sie zur Übung einmal nachrechnen, dass tatsächlich die  $\zeta^k$  sich mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels transformieren.)  $\square$

Das Vektorfeld  $[X, Y]$ , für das die Lie-Ableitung  $\partial_{[X, Y]}$  durch (8) gegeben ist, heißt *Kommutator* oder *Lie-Klammer* von  $X$  und  $Y$ . Lokal, also bezüglich einer Karte  $(x, U)$ , gilt  $[X, Y] = \sum_{i, k} \left( \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) e_k$ .

*Beispiele.* 1. Es gilt  $[e_i, e_j] = 0$  für jede Karte  $x$  (nachrechnen!). Insbesondere gilt das für  $\mathbb{R}^n$ .

2. Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . Wir identifizieren Tangentialvektoren mit Hauptteilen, und setzen

$$J(u, v) := (-v, u) = (\xi^1(u, v), \xi^2(u, v)), \quad e_1(u, v) := (1, 0) = (\eta^1(u, v), \eta^2(u, v)).$$

Dann sind die einzigen partiellen Ableitungen der Hauptteile  $\xi^i, \eta^i$ , die nicht verschwinden  $\frac{\partial}{\partial v} \xi^1 = -1$  und  $\frac{\partial}{\partial u} \xi^2 = 1$ . Es folgt  $[J, e_1] = (-\eta^1 \frac{\partial}{\partial u} \xi^2) e_2 = -(0, 1)$ .

Der Kommutator hat folgende anschauliche Interpretation, die wir in dieser Vorlesung aber nicht beweisen werden. Gegeben sei ein Punkt  $p \in M$ . Wir betrachten eine Integralkurve einer Masche, d.h. wir laufen zuerst in Richtung  $X$ , dann in Richtung  $Y$ , dann in Richtung  $-X$ , dann in Richtung  $-Y$ , und zwar jeweils für eine Zeit  $t > 0$ . Der Endpunkt sei  $q(t)$ . Im allgemeinen ist  $p \neq q(t)$  und der Tangentialvektor an die Kurve  $q(t)$  erfüllt  $\frac{d}{dt} q|_{t=0} = [X, Y]_p$ . Speziell für Kartenfelder kommt man jedoch zum Ausgangspunkt zurück, das war der Inhalt des ersten Beispiels.

Der Kommutator hat folgende Eigenschaften:

**Satz 7.** Für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

- (i) Antikommutativität  $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii) Linearität  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (iii) Jacobi-Identität  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ ,
- (iv)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(\partial_X g)Y - g(\partial_Y f)X$  für alle  $f, g \in \mathcal{D}(M)$

*Beweis.* Aus der Definition des Kommutators ergibt sich (i), aus (8), oder wegen Linearität der Lie-Ableitung, folgt (ii).

(iii)  $\partial_{[[X, Y], Z]} = \partial_{[X, Y]} \partial_Z - \partial_Z \partial_{[X, Y]} = \partial_X \partial_Y \partial_Z - \partial_Y \partial_X \partial_Z - \partial_Z \partial_X \partial_Y + \partial_Z \partial_Y \partial_X$ . Jetzt berechne die beiden zyklischen Vertauschungen genauso, und stelle fest: Spalten 1 und 3 sind gerade Permutationen, die sich paarweise zu 0 addieren; ebenso sind 2 und 4 ungerade Permutationen, die sich zu 0 addieren.

(iv) Wir verwenden die Produktregel beim zweiten Gleichheitszeichen:

$$\begin{aligned}\partial_{[fX, gY]} &= \partial_{fX} \partial_{gY} - \partial_{gY} \partial_{fX} = f((\partial_X g) \partial_Y + g \partial_X \partial_Y) - g((\partial_Y f) \partial_X + f \partial_Y \partial_X) \\ &= fg \partial_{[X, Y]} + f(\partial_X g) \partial_Y - g(\partial_Y f) \partial_X\end{aligned}$$

□

Sind allgemein ein Vektorraum  $\mathfrak{g}$  und eine Verknüpfung  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  gegeben, die die Eigenschaften (i) bis (iii) des Satzes erfüllt, so nennt man  $\mathfrak{g}$  *Lie-Algebra*. Der Raum der Vektorfelder  $\mathcal{V}(M)$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  bildet also eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra. Ein Beispiel einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra ist der Vektorraum der  $(n \times n)$ -Matrizen mit Kommutator  $[A, B] := AB - BA$ .

Es gibt zwei wichtige Sätze, die eine Annahme über die Lie-Klammer als Voraussetzung haben: Sind  $X_1, \dots, X_k$  Vektorfeldern mit  $2 \leq k < n$ , und sind die Felder linear unabhängig in  $p$ , so gilt:

1. Verschwinden alle Lie-Klammern paarweise, so kann man in einer Umgebung von  $p$  eine Karte finden, so dass die gegebenen Vektorfelder tangential an Parameterlinien sind.
2. Sind alle Lie-Klammern in der linearen Hülle der Vektorfelder enthalten, so kann man in einer Umgebung von  $p$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit finden, an die die gegebenen Vektorfelder in jedem Punkt tangential sind (Satz von Frobenius).

### 3.4. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 1 – QUIZ:

Prüfen Sie die folgenden Behauptungen bzw. beantworten Sie:

1. Karten sind immer Homöomorphismen auf ihr Bild.
2. Jeder Atlas enthält alle zu ihm differenzierbar verträglichen Karten.
3. Das Quadrat  $Q = \{0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  ist eine Mannigfaltigkeit.
4. Die Menge  $\Gamma = \{y = \pm\sqrt{x}\} \subset \mathbb{R}^2$  ist eine Mannigfaltigkeit.
5. Sei  $f \in \mathcal{D}(M)$  und  $\varphi: M \rightarrow N$ . Wofür stehen die Kurzschreibweisen  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ?
6. Auf jedem Torus  $T^n$  gibt es ein nicht-verschwindendes Vektorfeld.
7. Können die Ausdrücke  $\partial_X f$  bzw.  $\partial_Y \partial_X f$  definiert sein, auch wenn man das Vektorfeld  $X$  in nur einem Punkt kennt?

#### Aufgabe 2 – POLARKOORDINATEN:

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , sowie den Punkt  $p = (1, 0) \in M$ .

Gegeben seien zwei Karten um  $p$ : Einerseits die Karte  $(x := \text{id}, M)$  und andererseits die Karte  $(y, (0, \infty) \times \mathbb{R})$ , so dass

$$y^{-1}: (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow M, \quad y^{-1}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

- a) Wie lautet die Standardbasis  $\{X_1, X_2\}$  bezüglich  $x$ ?

- b) Was ist die Standardbasis  $\{Y_1, Y_2\}$  bezüglich  $y$  in  $p$ ? Drücken Sie diese in Termen von  $X_1$  und  $X_2$  aus.
- c) Berechnen Sie die Kartenwechsel  $x \circ y^{-1}$  und  $y \circ x^{-1}$ .
- d) Berechnen Sie das Differential  $d(x \circ y^{-1})_{y(p)}$ .

**Aufgabe 3** – ORIENTIERBARKEIT:

Zwei Karten  $(x, U), (y, V)$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißen *orientierbar verträglich*, wenn gilt

$$p \in U \cap V \quad \Rightarrow \quad \det(d(y \circ x^{-1}))_{x(p)} > 0.$$

Die Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *orientierbar*, wenn es einen Atlas  $\mathcal{A}$  gibt, so dass alle Kartenwechsel orientierbar verträglich sind.

- a) Geben Sie zwei Beispiele eines Paares von Karten einer Mannigfaltigkeit an, die eine orientierbar verträglich, die andere nicht.
- b) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  das Tangentialbündel  $TM$  orientierbar ist.

**Aufgabe 4** – LIE-KLAMMER IN DER EBENE:

- a) Geben Sie ein Beispiel von zwei nicht-konstanten Vektorfeldern  $X, Y$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , deren Kommutator verschwindet, und ein weiteres Paar von Vektorfeldern, für das der Kommutator nicht verschwindet.
- b) Der Kommutator zweier Vektorfelder  $X, Y$  sei von der Form  $[X, Y] = aX + bY$  mit  $a, b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  glatten Funktionen. Weiter gelte  $[X, Y]_p \neq 0$ . Zeigen Sie durch Lösung einer Differentialgleichung, dass es in einer Umgebung  $U(p)$  von  $p$  Funktionen  $f, g: U(p) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $[fX, gY] = 0$  in  $U(p)$ .

## Teil 2. Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Zusammenhänge

### 5. Vorlesung, Dienstag 27.10.09

---

Unser Ziel ist es, Begriffe der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten einzuführen. Dabei denken wir beispielsweise an die Länge von Kurven oder an die Krümmung einer Mannigfaltigkeit.

Für Längen und Inhalte braucht man offensichtlich nur die erste Fundamentalform axiomatisch einzuführen. Es war Gauß' Entdeckung von 1827, dass dies allein für Flächen bereits einen Krümmungsbegriff bestimmt. Riemann formulierte 1854, wie der Krümmungsbegriff in höherer Dimension auszusehen hätte; seine intuitiven Vorstellungen vom Begriff der Mannigfaltigkeit wurden aber erst 1913 durch Weyl präzise gefasst. Durch die Rückführung auf die Parallelverschiebung und durch die sogenannte kovariante Ableitung von Vektorfeldern gab Levi-Civita 1916 eine elegante Grundlage für den Krümmungsbegriff. Koszul stellte 1950 diese Begriffe in einen neuen Rahmen, indem er Zusammenhänge einführte, die dann von Ehresman verallgemeinert wurden.

#### 1. METRIKEN

**1.1. Semi-Riemannsche Metriken.** Will man Längen und Winkel in Mannigfaltigkeiten messen, muss man die Längen in jedem Tangentialraum kennen. Wir beginnen daher mit einer Erinnerung an Lineare Algebra.

Wir betrachten eine symmetrische Bilinearform  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Vektorraum  $V$ . Die Form heisst *ausgeartet*, wenn es ein  $w \in V \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $b(v, w) = 0$  für alle  $v \in V$ . Der *Index*  $k \in \{1, \dots, n\}$  von  $b$  ist die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem  $b(v, v) \leq 0$  gilt. Die Form  $b$  heißt *positiv definit*, wenn  $k = 0$  ist oder, äquivalent dazu,  $b(v, v) > 0$  für alle  $v \neq 0$ ; entsprechend für *negativ definit*; eine definite Form ist niemals ausgeartet.

Nun machen wir die Bilinearform punktabhängig:

**Definition.** Eine *semi-Riemannsche Metrik* auf einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Familie  $g$  von nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearformen

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \in M,$$

die in folgendem Sinne differenzierbar von  $p$  abhängen: Für je zwei differenzierbare Vektorfelder  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  ist  $p \mapsto g_p(X, Y)$  differenzierbar. Die Metrik heißt *Riemannsch*, wenn  $g_p$  positiv definit für alle  $p \in M$  ist.

Man nennt  $(M, g)$  oder kurz  $M$  *Riemannsche* bzw. *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit*; wir schreiben auch  $M_k^n$ , wenn  $M$  Dimension  $n$  und  $g$  Index  $k$  hat.



Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist äquivalent dazu, dass bezüglich jeder Karte  $(x, U)$  die Funktionen

$$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij}(p) := g_p(e_i(p), e_j(p)), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

differenzierbar sind.

*Übung.* 1. Warum kann der Index von  $g_p$  nicht von  $p$  abhängen?

2. Zeigen Sie, dass eine Matrix  $(g^{ij})$  existiert, die invers zu  $(g_{ij})$  ist, also  $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ .

*Beispiel.* Das Musterbeispiel sind Vektorräume. Der *Minkowski-Raum* ist der  $n$ -dimensionale euklidische Raum mit einer konstanten Metrik vom Index  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\mathbb{R}_k^n := \left( \mathbb{R}^n, g(v, w) := - \sum_{i=1}^k v^i w^i + \sum_{i=k+1}^n v^i w^i \right).$$

Speziell ist  $\mathbb{R}_0^n$  der *Euklidische Raum*. Im Falle  $k = 0$  schreiben wir auch weiterhin  $\langle v, w \rangle$  für  $g(v, w)$  und  $\mathbb{R}^n$  für  $\mathbb{R}_0^n$ .

## 6. Vorlesung, Mittwoch 28.10.09

---

*Beispiele.* 1. *Klassische Flächen:* Ist  $F: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Immersion, so wird  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit durch Zurückziehen der Metrik  $g_p(X, Y) := \langle dF_p \cdot X, dF_p \cdot Y \rangle$ . Speziell für  $M = \mathbb{R}^n$  wird hierdurch eine neue Metrik erklärt, die sogenannte erste Fundamentalform der Immersion.

2. Ein Spezialfall sind Graphen in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $F(u) = (u, f(u))$  für  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Erklären Sie eine Riemannsche Metrik  $g_{ij}$  auf  $\Omega$  in diesem Fall.

3. Analog wird für den Fall einer Immersion  $f: M \rightarrow (N, h)$  die Mannigfaltigkeit  $M$  Riemannsch durch  $g_p(X, Y) := h_{f(p)}(df_p \cdot X, df_p \cdot Y)$ .

**1.2. Länge, Winkel, Volumen.** Bevor wir weitere Beispiele semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten angeben, wollen wir den Hauptzweck von Metriken erwähnen.

Für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  setzen wir

$$(1) \quad \|v\|_p := \sqrt{|g_p(v, v)|} \quad \text{für } v \in T_p M.$$

Sei  $c: I \rightarrow M$  differenzierbare Kurve, wobei  $I$  offenes Intervall ist und  $c'(t) := dc_t \in T_{c(t)} M$  der Tangentialvektor. Die *Bogenlänge* oder einfach *Länge* von  $c$  ist dann

$$L(c) := \int_a^b \|c'\| dt = \int_a^b \sqrt{|g_{c(t)}(c'(t), c'(t))|} dt \geq 0.$$

Hat man zwei Punkte  $p, q$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ , so ergibt das Infimum  $d(p, q)$  der Bogenlängen von Kurven zwischen  $p, q$  eine *Metrik* auf  $M$ . Wir werden sie noch genauer untersuchen.

Durch Längen sind Winkel definiert: Im Euklidischen gilt  $\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \angle(v, w)$ . Entsprechend können wir auch einen *Riemannschen Winkel*  $\angle(v, w)$  erklären durch

$$(2) \quad g_p(v, w) = \|v\|_p \|w\|_p \cos \angle(v, w) \quad \text{für } v, w \neq 0.$$

(Im semi-Riemannschen Fall müssen wir sogar  $\|v\|_p, \|w\|_p \neq 0$  voraussetzen.)

Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten kann man auch integrieren. Weil dies völlig analog zu Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^m$  ist und wir es für diese Vorlesung nicht weiter benötigen, sei dies nur kurz bemerkt. Das *Volumen* des Kartenbildes  $(x, U)$  ist durch

$$\text{vol}(U) = \int_{x(U)} \sqrt{\det(g_{ij}(x^{-1}(u)))} du_1 \dots du_n$$

gegeben und tatsächlich unabhängig von der gewählten Karte (nach Transformationsformel, siehe Vorlesung Integration). Durch Summation über eine disjunkte Vereinigung von in Karten liegenden Teilmengen kann man über die ganze Mannigfaltigkeit integrieren.

Für die folgenden Metriken stimmen Winkel überein:

### 1.3. Konforme Metriken.

**Definition.** Auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißt eine Riemannsche Metrik  $g$  *konform* zur Metrik  $h$ , wenn eine differenzierbare Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}_+$  existiert, so dass  $h_p = f(p)g_p$  für alle  $p \in M$ .

Eine einfache aber dennoch sehr interessante Klasse von Riemannschen Metriken sind auf Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  erklärte Metriken, die konform zur Standardmetrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sind. Wir deuten den Konformfaktor als eine Dichtefunktion, und die Riemannsche Metrik auf  $\Omega$  als ein inhomogenes Medium. Tatsächlich braucht eine Kurve mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\|c'\| = \sqrt{f(c)\langle c', c' \rangle_0} = \text{const.}$  länger, um durch Gebiete hindurchzukommen, wo  $f$  groß ist. Kürzeste Kurven werden also solche Bereiche zu vermeiden versuchen.

Der *hyperbolische Raum*  $\mathbb{H}^n$  ist wohl das prominenteste Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wir geben ihn in zwei verschiedenen Modellen an, die jeweils durch eine Karte gegeben sind.

*Beispiel.* 1. Das *Halbebenen-Modell* des hyperbolischen Raumes ist

$$(3) \quad M^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad g_p(X, Y) := \frac{1}{p_n^2} \langle X, Y \rangle.$$

Wir haben also die Dichtefunktion  $f(p) = 1/p_n^2$ , die für  $p_n \rightarrow 0$  explodiert. Betrachten wir für  $n = 2$  die Kurve  $c_\varepsilon(t) := (0, t)$ , definiert auf  $t \in [\varepsilon, 1]$ . Ihre Länge ist

$$L(c_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \sqrt{\frac{1}{t^2} \langle c'(t), c'(t) \rangle} dt = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} dt = -\log(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(c_\varepsilon) = \infty$  wird die Kurve unendlich lang, wenn wir sie bis nach  $(0, 0)$  fortsetzen. Tatsächlich ist jeder Punkt  $p \in M$  vom sogenannten *idealen Rand*  $\mathbb{R} \times \{0\}$  unendlich weit entfernt. Jede horizontale Kurve  $c(t) = (t, 1)$  mit festen Endpunkten wird kürzer wenn man (weg von den Endpunkten) die zweite Koordinate geeignet vergrößert. Tatsächlich werden wir sehen, dass senkrecht auf den Rand auftreffende Halbkreise kürzeste Kurven sind.

## 2. Das Poincaré-Modell

$$M^n := B^n, \quad g_p(v, w) := \frac{4}{(1 - |p|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Auch hier explodiert die Dichtefunktion gegen den “idealen Rand”  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Das letzte Beispiel hat eine Verallgemeinerung. Sie geht zurück auf Riemanns Inauguralvorlesung von 1854: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. Sei  $\kappa \in \mathbb{R}$  und

$$(4) \quad M_\kappa := \{p \in \mathbb{R}^n : -\kappa|p|^2 < 1\} \quad \text{mit} \quad g_p(v, w) := \frac{4}{(1 + \kappa|p|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dann ist  $M_\kappa$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die, wie noch zu definieren ist, konstante Krümmung  $\kappa$  besitzt. Für  $\kappa = 0$  ist dies  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik  $4\langle \cdot, \cdot \rangle$ , für  $\kappa = -1$  das Poincaré-Modell, für  $\kappa = 1$  entsteht die Metrik durch stereographische Projektion aus  $\mathbb{S}^n$ .

**1.4. Etwas Physik.** Die Räume  $\mathbb{R}_1^n$  nennt man auch *Lorentz-Räume*. Wir schreiben Elemente von  $\mathbb{R}_1^n$  als  $(u_1, \dots, u_{n-1}, t)$  und fassen die letzte Koordinate als Zeit auf, die restlichen als Ort. Die Menge  $K := \{t^2 = u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2\}$  heißt *Lichtkegel*. Die Bezeichnung stützt sich auf die in der Relativitätstheorie übliche Normierung, dass Lichtstrahlen Geschwindigkeit 1 haben: Unter dieser Annahme werden genau die Punkte aus  $K$  mit  $t > 0$  durch vom Ursprung 0 ausgehende Lichtstrahlen erreicht.

**Definition.** Ein Tangentialvektor  $v$  an eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *raumartig*, wenn  $g_p(v, v) > 0$  oder  $v = 0$ ; *lichtartig* oder *null*, wenn  $g_p(v, v) = 0$ , aber  $v \neq 0$ ; er heißt *zeitartig*, wenn  $g_p(v, v) < 0$ .

Der Raum der speziellen Relativitätstheorie ist  $\mathbb{R}_1^4$ . Um die Koordinatenwahl in diesen Räumen zu verstehen, formulieren wir zuerst Postulate der speziellen Relativitätstheorie:

1. Alle gleichförmig bewegten Systeme (Inertialsysteme) sind gleichberechtigt, keines ist ausgezeichnet (Relativitätsprinzip).
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem System gleich, und kein Beobachter kann sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Jede Bahn eines gleichförmig bewegten Beobachters, der sich zur Zeit 0 im Ursprung befindet, ist eine Ursprungsgerade. Nach 2. sind aber nur Ursprungsgeraden innerhalb des

Kegels  $K$  möglich. Wegen 1. sind alle diese Geraden, insbesondere die gegebene  $t$ -Achse, gleichwertig. Für den Beobachter stellt genau seine Gerade die Zeitachse dar. Für jeden Vektor innerhalb des Kegels gibt es also ein Inertialsystem, für das dieser Vektor auf der Zeitachse liegt; d.h. ein geeigneter Beobachter sieht ihn als zeitartig an.

Nur der Beobachter, der sich auf der  $t$ -Achse bewegt (bzw. dort steht), wird  $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$  als den ihn umgebenden dreidimensionalen Raum ansehen. Jeder andere im Außenraum von  $K$  liegende dreidimensionale Unterraum von  $\mathbb{R}_1^4$  wird von einem geeignet bewegten anderen Beobachter als sein Raum angesehen. Dazu gibt es eine Koordinatentransformation, die sogenannte Lorentz-Transformation.

Der Raum der allgemeinen Relativitätstheorie ist eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M_1^4$ . In jedem Punkt hat sie einen Tangentialraum  $T_p M$ , der ein Lorentzraum ist. Die Richtungen aus  $T_p M$ , die auf dem Lichtkegel liegen, sind physikalisch ausgezeichnet, die raum- oder zeitartigen Tangentialvektoren sind aber jeweils gleichberechtigt, d.h. es gibt keine kanonischen Koordinaten.

**1.5. Isometrien.** Wie andere mathematische Strukturen auch (Gruppe, Menge, Vektorraum, Mannigfaltigkeit, topologischer Raum), so haben semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten einen natürlichen Äquivalenzbegriff:

**Definition.** Seien  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein (lokaler) Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$  heißt (*lokale*) *Isometrie*, wenn gilt

$$g_p(X, Y) = h_{\varphi(p)}(d\varphi_p X, d\varphi_p Y) \quad \text{für alle } p \in M \text{ und } X, Y \in T_p M.$$

- Beispiele.*
1.  $(\mathbb{R}^n, c^2 \langle X, Y \rangle_k)$  für  $c > 0$  und  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$  sind isometrisch: Wähle  $\varphi := \frac{1}{c} \text{id}$ .
  2. Die obigen Modelle von  $\mathbb{H}^n$  sind isometrisch (später).
  3. Alle Verformungen eines Blattes Papier sind isometrisch.
  4. Zylinder und Ebene sind lokal isometrisch, ebenso  $\mathbb{R}P^n$  und  $\mathbb{S}^n$ .
  5. Der Rotationstorus und der flache Torus  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  sind zwar diffeomorph, aber nicht isometrisch.
  6. Die stereographische Projektion  $st: \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Isometrie von  $(\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}})$  nach (4) mit  $\kappa = 1$ .
  7. Wozu sind Riemannsche 1-Mannigfaltigkeiten isometrisch?

Es sei  $\varphi: M \rightarrow N$  lokale Isometrie, und  $(x, U)$  Karte von  $M$  um  $p$ . Nötigenfalls nach Verkleinerung von  $U$  ist die Einschränkung  $\varphi|_U$  ein Diffeomorphismus, und daher können wir auch eine Karte  $y = x \circ \varphi^{-1}$  um  $\varphi(p)$  definieren. Ist  $e_i$  die Standardbasis bzgl.  $x$ , so ist  $f_i := d\varphi_p e_i \in T_{\varphi(p)} N$  die Standardbasis bzgl.  $y$ , und es gilt:

$$(5) \quad h_{ij}(\varphi(p)) = h_{\varphi(p)}(f_i, f_j) = h_{\varphi(p)}(d\varphi e_i, d\varphi e_j) \stackrel{\varphi \text{ Isometrie}}{=} g_p(e_i, e_j) = g_{ij}(p)$$

Die lokalen Darstellungen  $x$  von  $M$  und  $y = x \circ \varphi^{-1}$  von  $N$  stimmen also überein.

Semi-Riemannsche Geometrie ist das Studium derjenigen Eigenschaften semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die unter Isometrien erhalten bleiben. Natürlich fragt man insbesondere nach Invarianten, d.h. Eigenschaften, die unter der Äquivalenzrelation der Isometrie erhalten bleiben. Wir werden sehen, dass die Krümmung eine Invariante ist. Im aus der klassischen Differentialgeometrie bekannten zweidimensionalen Fall gilt das bereits für die Gauß-Krümmung: Dies ist genau das theorema egregium. Daraus folgt beispielsweise die Behauptung von Beispiel 5.

Die Isometrien von  $(M, g)$  in sich selbst bilden eine Gruppe, die *Isometriegruppe*. In un-symmetrischen Fällen besteht sie vielleicht nur aus der Identität, in symmetrischen kann sie auch kontinuierlich sein.

*Beispiele.* 1. Die Isometriegruppe von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sind Bewegungen, also  $O(n)$  komponiert mit Translationen.

2. Isometriegruppe von  $(\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist  $O(n)$ .

3. Die orientierungstreuen Isometrien der hyperbolischen Ebene im oberen Halbebenen-Modell sind  $SL(2, \mathbb{R})$ .

3. Die Isometriegruppe eines Ellipsoids in  $\mathbb{R}^3$  mit paarweise verschiedenen Achsen ist diskret (und besteht woraus?).

*Bemerkung.* Nash zeigte 1956: Für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  gibt es eine isometrische Einbettung  $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , d.h.  $g$  ist die erste Fundamentalform der Einbettung  $\varphi$ . Anders gesagt: Die Klasse der Untermannigfaltigkeiten des  $(\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  umfasst bereits alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die nötige Dimension ist allerdings hoch,  $k = \frac{1}{2}n(3n + 1)$  falls  $M$  kompakt ist, und sogar  $k = \frac{1}{2}n(3n + 1)(n + 1)$  im nicht-kompakten Fall.

Umgekehrt gibt es keine globale Einbettung der hyperbolischen Ebene nach  $\mathbb{R}^3$  (Satz von Hilbert), jedoch gibt es solche Einbettungen lokal. Siehe Spivak V, Kap. 11 für eine eingehende Diskussion von Bedingungen, wann isometrische Einbettungen unmöglich sind.

## 7. Vorlesung, Dienstag 3.11.09

---

1.6. **Quotienten.** Wir wollen kurz das wichtige Beispiel von Quotientenmannigfaltigkeiten erwähnen, im ersten Schritt noch ohne Riemannsche Metrik.

**Definition.** Es sei  $G$  eine Gruppe mit Einselement  $e$ . Man sagt,  $G$  operiert (*wirkt*) auf [*acts on*] einer Mannigfaltigkeit  $M$ , wenn es eine Abbildung  $\varphi: G \times M \rightarrow M, (g, p) \mapsto \varphi_g(p)$ , gibt mit:

(i) Für jedes  $g$  ist  $\varphi_g: M \rightarrow M$  Diffeomorphismus.

(ii)  $g \mapsto \varphi_g$  ist Gruppenhomomorphismus, d.h. sind  $g, h \in G$ , so gilt  $\varphi_{hg} = \varphi_h \circ \varphi_g$ ; insbesondere gilt  $\varphi_e = \text{id}_M$  (warum?).

*Beispiele.* 1. Die Gruppe  $G = (\mathbb{Z}^n, +)$  operiert auf  $M = \mathbb{R}^n$  durch  $\varphi_a(x) := a + x$ .

2. Die Gruppe  $\mathbb{S}^1 \subset (\mathbb{C}, \cdot)$  operiert auf  $\mathbb{C}^*$  durch  $\varphi_a(z) = az$ .

3. Die Gruppe  $G = (\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, +)$  operiert auf  $M = \mathbb{S}^n$  durch die beiden Diffeomorphismen  $\{\text{id}, -\text{id}\}$ .

Durch

$$x \sim y \quad : \iff \quad \exists g \in G : \quad y = \varphi_g(x)$$

wird eine Äquivalenzrelation definiert; dabei folgt die Transitivität daraus, dass  $g \mapsto \varphi_g$  Gruppenhomomorphismus ist. Es sei  $M/G$  der Quotientenraum, den man auch als *Bahnenraum* [orbit space] verstehen kann. Im folgenden schreiben wir  $\pi(p)$  für die Äquivalenzklasse von  $p$ , denn wir sehen  $\pi: M \rightarrow M/G$  als *Projektion* an.

In den obigen Beispielen 1. und 3. hat der Quotient  $M/G$  die gleiche Dimension wie  $M$ , während in 2. seine Dimension echt kleiner ist. Wir verfolgen den Fall von kleinerer Dimension hier nicht weiter, der Quotient heißt dann *homogener Raum*. Durch folgende Forderung erreichen wir, dass der Quotient die gleiche Dimension hat:

**Definition.**  $G$  operiert *diskret* oder *eigentlich diskontinuierlich* [properly discontinuous], wenn jedes  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  hat, so dass  $U \cap \varphi_g(U) = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$ .

**Satz 1.** *Es operiere  $G$  diskret auf einer Mannigfaltigkeit  $M^n$ .*

(i) *Ist  $M/G$  Hausdorffsch, so ist die Menge  $M/G$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\pi$  lokaler Diffeomorphismus.*

(ii) *Ist  $(M, g)$  semi-Riemannsch und operiert  $G$  durch Isometrien, so gibt es auf  $M/G$  genau eine semi-Riemannsche Metrik  $h$ , bezüglich derer  $\pi$  lokale Isometrie ist.*

*Beweis.* Wir übergehen hier den Beweis von (i) und den Beweis, dass der Quotient  $M/G$  in (ii) Hausdorff ist.

In kleinen Umgebungen des Punktepaars  $p \in M$  und  $q = \pi(p) \in M/G$  ist der lokale Diffeomorphismus  $\pi = \pi_p$  umkehrbar; nach dem Umkehrsatz ist  $(d\pi_p)^{-1} = d(\pi_p)^{-1}$ . Wir können also setzen

$$(6) \quad h_q(X, Y) := g_p((d\pi_p)^{-1}X, (d\pi_p)^{-1}Y) \quad \text{für } X, Y \in T_q(M/G).$$

Dann wird die Projektion  $(\pi_p)^{-1}$  zur lokalen Isometrie; die Differenzierbarkeit von  $h$  ist offensichtlich.

Um zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $p$  von  $q$  ist, betrachten wir einen weiteren Punkt  $p' \in M$  mit  $\pi(p') = q$ . Es gibt dann eine Isometrie

$\varphi \in G$  mit  $\varphi(p) = p'$ . Aus  $\pi_{p'} \circ \varphi(p) = \pi_p(p)$  folgt  $(d\pi_{p'})^{-1} = d\varphi_p \circ (d\pi_p)^{-1}$  und daher stimmt (6) für  $p$  und  $p'$  überein:

$$\begin{aligned} g_p((d\pi_p)^{-1}X, (d\pi_p)^{-1}Y) &\stackrel{\varphi \text{ Isometrie}}{=} g_{p'}(d\varphi(d\pi_p)^{-1}X, d\varphi(d\pi_p)^{-1}Y) \\ &= g_{p'}((d\pi_{p'})^{-1}X, (d\pi_{p'})^{-1}Y). \end{aligned} \quad \square$$

*Beispiel.* 1.  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \{\pm \text{id}\}$  ist Riemannsche Mannigfaltigkeit.

2.  $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$  ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sofern  $\Gamma$  ein *Gitter* [lattice] ist, d.h. es gilt  $\Gamma = \{ \sum_{i=1}^n k^i v_i : k^i \in \mathbb{Z} \}$  mit  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig.

**1.7. Existenz Riemannscher Metriken.** Wir erinnern an den Begriff der Überdeckung einer Mannigfaltigkeit  $M$  durch offene Mengen.

**Definition.** Eine (differenzierbare) Zerlegung der Eins [partition of unity] relativ zu einer Überdeckung  $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$  ist eine Familie  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  von Funktionen in  $\mathcal{D}(M)$  mit

- (i)  $f_\alpha \geq 0$  und  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha \forall \alpha$ ,
- (ii)  $\forall p \in M$  gibt es eine Umgebung, die nur endlich viele  $\text{supp } f_\alpha$  trifft,
- (iii)  $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1 \forall p \in M$ .

Bedingung (ii) ist sicher erfüllt, wenn die Überdeckung  $\{U_\alpha\}$  lokal endlich ist.

Wir benutzen die folgende Konsequenz aus dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, die wir ohne Beweis angeben:

**Satz 2.** Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es eine Zerlegung der Eins relativ zu einem Atlas.

**Korollar 3.** Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik.

*Beweis.* Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  Vektorfelder mit lokalen Darstellungen  $X_p = \sum \xi_\alpha^i(p) e_i^\alpha$  und  $Y_p = \sum \eta_\alpha^i(p) e_i^\alpha$  bezüglich der Karte  $(x_\alpha, U_\alpha) \in \mathcal{A}$  mit Standardbasis  $e_i^\alpha$ .

Auf  $U_\alpha \subset M$  wählen wir die von der Standardmetrik induzierte Riemannsche Metrik

$$g_p^\alpha(X, Y) := \sum_{i=1}^n \xi_\alpha^i(p) \eta_\alpha^i(p), \quad p \in U_\alpha,$$

und setzen sie durch 0 auf ganz  $M$  fort.

Es sei nun  $f_\alpha$  eine Zerlegung der Eins relativ zu einem Atlas  $(x_\alpha, U_\alpha)$ . Dann ist  $g := \sum_\alpha f_\alpha g^\alpha$  in jedem Punkt  $p$  eine endliche Summe, und  $g$  ist bilinear, positiv, symmetrisch sowie differenzierbar im Fußpunkt.  $\square$

*Bemerkung.* Trägt eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit auch eine semi-Riemannsche Metrik vom Index  $k$  für jedes  $1 \leq k \leq n - 1$ ? Erstaunlicherweise ist die Antwort negativ. Hier ist ein Gegenbeispiel für Index  $k = 1$  und  $n = 2$ : Die Eigenrichtung des negativen Eigenwerts definiert ein *Linienfeld* auf  $M$ , d.h. einen eindimensionalen Unterraum jedes Tangentialraums. Aber  $\mathbb{S}^2$  besitzt kein Linienfeld. Tatsächlich gilt das für jede kompakte orientierbare Fläche  $M$  mit Euler-Charakteristik  $\chi(M) \neq 0$ , und daher besitzt allein der Torus ein nicht-verschwindendes Linienfeld. Unter den kompakten orientierbaren Flächen besitzt also nur der Torus eine semi-Riemannsche Metrik vom Index 1.

### 1.8. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 5 – MATRIXDARSTELLUNG VON BILINEARFORMEN:

Es sei  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform.

- a) Geben Sie zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $A$  an mit

$$b(v, w) = v^T \cdot A \cdot w.$$

- b) Gibt es eine Basis, für die  $A$  diagonal ist? (Zitieren Sie einen Satz!)
- c) Stellen Sie eine Bedingung an  $A$  (bzw.  $b$ ), so dass  $A$  Rang  $n$  hat. Geben Sie dann eine Basis an, so dass die Diagonale von  $A$  nur Elemente  $\pm 1$  enthält.

#### Aufgabe 6 – METRIK AUF EINEM GRAPHEN:

Für  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  betrachten wir den Graphen  $M := \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 = f(u_1, u_2)\}$ .

- a) Warum ist  $M$  Mannigfaltigkeit und  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$  eine Immersion?
- b) Für  $p \in M := \mathbb{R}^2$  sei  $g_p(X, Y) := \langle d\varphi \cdot X, d\varphi \cdot Y \rangle$  für  $X, Y \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$ . Warum ist  $g_p$  eine symmetrische Bilinearform auf  $M$ ?
- c) Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$g_{ij}(p) := g_p(e_i(p), e_j(p)), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

#### Aufgabe 7 – POLARKOORDINATEN:

Es sei  $P: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  gegeben.

- a) Wählen Sie ein maximales  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , so dass  $P$  Immersion ist. Warum ist  $P$  lokaler Diffeomorphismus?
- b) Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Standardmetrik auf dem Bild. Bestimmen Sie die Riemannsche Metrik  $g$  auf  $\Omega$ , so dass  $P$  lokale Isometrie wird.

#### Aufgabe 8 – LÄNGEN VON KURVEN:

Berechnen Sie die Längen  $L$  der Kurven



- a)  $c_{-1}: [0, T_{-1}] \rightarrow M_{-1}^2$ ,  $c_{-1}(t) = (0, t)$ , mit  $T_{-1} < 1$ ;  
 b)  $c_{+1}: [0, T_{+1}] \rightarrow M_{+1}^2$ ,  $c_{+1}(t) = (0, t)$ , mit  $T_{+1} > 0$ .

**Aufgabe 9** – METRIK AUF MATRIZENRÄUMEN:

Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beliebige Matrizen.

- a) Zeigen Sie, dass

$$g(A, B) := \text{Spur}(A \cdot B)$$

eine symmetrische Bilinearform darstellt.

- b) Was ist das Vorzeichen von  $g(A, A)$ , falls  $A$  symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist?  
 c) Berechnen Sie den Index von  $g$ . Schreiben Sie dazu eine gegebene Matrix  $A$  als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

**Aufgabe 10** – GRUPPENOPERATIONEN:

Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen Gruppenoperationen definieren und entscheiden Sie, welche Gruppenoperationen diskret sind:

- a) Die Gruppe  $G = (\mathbb{Z}_7, +)$  durch Rotationen  $\{\varphi_k = \text{Rotation um Winkel } 2k\pi/7: k \in \mathbb{Z}_7\} \subset \text{SO}(2)$  auf  $\mathbb{R}^2$ .  
 b) Die Gruppe  $G = (\mathbb{Z}^n, +)$  durch  $\varphi_a(x) := a + x$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  
 c) Die Gruppe  $G = (\mathbb{R}, +)$  durch  $\varphi_a(x, y) := (a + x, y)$  auf  $\mathbb{R}^2$ .  
 d) Die Gruppe  $G = (\text{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$  durch

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

auf der oberen Halbebene  $\{z = x + iy \in \mathbb{C}: y > 0\}$ .

**Aufgabe 11** – PUNKTSYMMETRISCHE UNTERMANNIGFALTIGKEITEN:

Wir nennen eine Untermannigfaltigkeit  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  *punktsymmetrisch*, wenn  $0 \notin M$ , und  $p \in M$  genau dann, wenn  $-p \in M$ . Zeigen Sie:

- a) Die Operation von  $G := \mathbb{Z}_2$  durch  $\{\text{id}, -\text{id}\}$  ist diskret auf jeder punktsymmetrischen Untermannigfaltigkeit.  
 b)  $M/G$  ist Hausdorffsch.  
 c) Betrachten Sie nun Rotationstorus, Zylinder und  $\mathbb{S}^n$ . Überlegen Sie, welche topologischen Räume die Quotienten darstellen?

## 2. PARALLELITÄT UND KOVARIANTE ABLEITUNG FÜR IMMERSIERTE FLÄCHEN

Alle weiteren Riemannschen Begriffe, die wir einführen werden, beruhen auf einer Richtungsableitung von Vektorfeldern, der sogenannten kovarianten Ableitung. Die Parallelverschiebung ist eine geometrische Abbildung von einem Tangentialraum  $T_p M$  einer Mannigfaltigkeit in einen anderen  $T_q M$ . Sie wird wegabhängig sein, d.h. nur bezüglich einer Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$  definiert sein.

Das vorliegende Kapitel dient der Motivation der axiomatischen Definition der kovarianten Ableitung im nächsten Kapitel. Dazu werden wir immersierte Flächen betrachten, wo sich der Begriff der Parallelverschiebung durch Projektion aus dem umgebenden Raum ergibt.

**2.1. Parallelverschiebung am Beispiel.** Wir stellen folgende Anforderung: Unter Parallelverschiebung soll sich ein Vektorfeld so wenig wie nötig ändern.

Wir sehen uns zwei Fälle an, in denen die Forderung trivialerweise erfüllt ist:

1. Ein Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^n$  betrachten wir als parallel, genau dann wenn es konstant ist. Äquivalent ist das Verschwinden seiner Ableitung längs jeder Kurve,  $\frac{d}{dt}(X \circ c)(t) = 0$ .
2. Ein Vektorfeld, das
  - tangential an eine Untermannigfaltigkeit
  - aber konstant im umgebenden Raum ist,

sehen wir ebenfalls als parallel an. Im Beispiel  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  könnte das ein Tangentialvektor  $X(t)$  sein, der senkrecht auf einem Großkreis  $c(t)$  steht.

Nun sehen wir uns interessantere Fälle am Beispiel von  $\mathbb{S}^2$  an. Für einen Großkreis  $c$  sei in einem Punkt  $c(0)$  der Tangentialvektor als Startvektor für ein Vektorfeld  $X$  gegeben, also  $c'(0) = X(0)$ . Die konstante Fortsetzung  $X(0)$  liegt dann nicht im Tangentialraum der Sphäre  $T_{c(t)}\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , und wir müssen  $X(0)$  auf irgendeine Weise in den Tangentialraum zurückbefördern. Wir ändern  $X$  möglichst wenig, indem wir  $X$  nur normal zu  $T_{c(t)}\mathbb{S}^2$  ändern, jedoch nicht tangential. Dies bedeutet, dass wir die infinitesimale Bedingung verlangen

$$(7) \quad X'(t) \in (T_{c(t)}\mathbb{S}^2)^\perp \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{für alle } t.$$

Der Tangentialvektor  $X(t) := c'(t)$  des Großkreises setzt  $X(0)$  fort mit dieser Eigenschaft, denn  $c''(t) = -c(t) \perp T_{c(t)}\mathbb{S}^2$ . Wir sehen daher  $X(t) = c'(t)$  als Parallelverschiebung von  $X(0)$  an! Dies ist eine natürliche Bedingung, denken Sie nur an ein Flugzeug, das "geradeaus" über die Erdkugel fliegt.

Ist schließlich  $X$  beliebiger Einheitstangentialvektor an den Nordpol, so verlangen wir ebenfalls (7). Sei  $\alpha(t)$  der orientierte Winkel, den  $X(t)$  mit  $c'(t)$  einschließt. Wir behaupten, dass (7) genau dann erfüllt wird, wenn  $\alpha(t)$  konstant ist und  $X(t)$  Einheitslänge hat.

Sei dazu  $Y$  der konstante Einheitsvektor senkrecht zur Ebene mit dem Großkreis  $c$  und  $X(t) := \cos \alpha(t) c'(t) + \sin \alpha(t) Y$ , so gilt wie gewünscht

$$\alpha = \text{const} \quad \Rightarrow \quad X'(t) = \cos \alpha c''(t) \in (T_{c(t)}\mathbb{S}^2)^\perp,$$

und umgekehrt (warum?).

## 8. Vorlesung, Mittwoch 4.11.09

---

*Bemerkung.* Man kann den Parallelitätsbegriff (7) auch physikalisch motivieren. Wir betrachten ein (Foucaultsches) Pendel auf der Erdoberfläche  $\mathbb{S}^2$ , wobei wir von der Erdrotation absehen. Wir bewegen uns nun längs einer gegebenen Kurve  $c(t)$  und führen das Pendel mit. Die Pendelebene wird aufgespannt vom Normalenvektor an die Erdoberfläche und einem gewissen Tangentialvektor. Letzterer definiert ein stetiges Einheitsvektorfeld  $X(t)$  längs  $c(t)$ . Weil die Gravitation nur in Normalenrichtung auf das Pendel einwirkt, es in Tangentialrichtung aber kräftefrei beläßt, muss (7) gelten, und daher wird  $X(t)$  parallel verschoben längs  $c$ .

**2.2. Parallelverschiebung: Definition und Eigenschaften.** Wir ersetzen nun  $\mathbb{S}^2$  durch das Bild einer beliebigen Immersion  $F: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Kodimension  $m - n \geq 0$ . Die Mannigfaltigkeit  $M^n$  betrachten wir mit der Riemannschen Metrik

$$(8) \quad g_p(X, Y) := \langle dF_p X, dF_p Y \rangle,$$

die durch Zurückziehen der Metrik von  $\mathbb{R}^m$  entsteht. Wir bezeichnen mit  ${}^\top$  die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum des Bildes der Immersion,  ${}^\top: \mathbb{R}^m \rightarrow dF(T_p M)$ ; diese Notation gibt nicht wieder, dass die Projektion vom Punkt  $p$  abhängt.

Wir betrachten eine differenzierbare Kurve  $\gamma$  in der Mannigfaltigkeit  $M$ . Ein *Vektorfeld längs der Kurve*  $\gamma: I \rightarrow M$  ist eine Abbildung  $X: I \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ . Wir machen nun (7) zu einer Definition.

**Definition.** Ein Vektorfeld  $X$  längs einer Kurve  $\gamma$  in einer Mannigfaltigkeit  $M$ , die durch  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  immersiert ist, heißt *parallel längs  $\gamma$* , wenn seine Tangentialprojektion erfüllt

$$(9) \quad [(dF_{\gamma(t)} \cdot X)'(t)]^\top = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Wir nennen  $X(t)$  eine *Parallelverschiebung* von  $X(t_0)$  längs  $\gamma$ .

Die Bedingung (9) sagt, dass  $dF(X)$  keine tangentiale Veränderung ausführt. Wie im Beispiel von  $\mathbb{S}^2$  gilt daher auch im allgemeinen, dass ein paralleles Feld  $dFX$  weder tangential rotiert noch seine Länge ändert:

**Satz 4.** Sind  $X, Y$  parallel längs  $\gamma$ , so ist  $g(X, Y) := \langle dF \cdot X, dF \cdot Y \rangle$  konstant. Insbesondere bleiben konstant: die Länge  $\|X\|$  und der für  $X, Y \neq 0$  durch (2) definierte Winkel  $\angle(X, Y)$ .

*Beweis.* Wir nutzen aus, dass  $dF \cdot X$  und  $dF \cdot Y$  tangential sind (bei (\*)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(X, Y) &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \left\langle \frac{d}{dt}dF \cdot X, dF \cdot Y \right\rangle + \left\langle dF \cdot X, \frac{d}{dt}dF \cdot Y \right\rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \left\langle \underbrace{\left( \frac{d}{dt}dF \cdot X \right)^\top}_{=0}, dF \cdot Y \right\rangle + \left\langle dF \cdot X, \underbrace{\left( \frac{d}{dt}dF \cdot Y \right)^\top}_{=0} \right\rangle = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Ergebnis einer Parallelverschiebung von  $T_p F$  nach  $T_q F$  vom gewählten Weg von  $p$  nach  $q$  abhängt:

*Beispiel.* Wir betrachten eine geschlossene Kurve  $c$  in  $\mathbb{S}^2$  und geben ein Feld an, das unter Parallelverschiebung entlang  $c$  nicht zu seiner Ausgangsrichtung zurückkehrt. Dazu nehmen wir ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlängen  $\frac{\pi}{2}$ , z.B. mit dem Nordpol als einer Ecke und der gegenüberliegenden Seite auf dem Äquator. Die Südrichtung definiert ein Einheitsfeld, das parallel ist (warum?), aber am Nordpol um  $\frac{\pi}{2}$  springt.

Direkt aus der Definition folgt, dass die Parallelverschiebung von zwei Immersionen übereinstimmt, wenn ihre Tangentialräume allein entlang der Kurve übereinstimmen. Denken Sie z.B. an einen Breitenkreis der Sphäre und einen Kegel, der die Sphäre im Breitenkreis tangential berührt.

**Satz 5.** *Es sei  $c$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^m$ , die im Schnitt des Bildes zweier Immersionen  $F_1, F_2$  liegt, so dass die Tangentialebenen für jeden Punkt aus  $c$  übereinstimmen. Dann stimmt auch die Parallelverschiebung längs  $c$  für beide Flächen überein.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung stimmen die beiden Tangentialprojektionen bzgl.  $F_1$  und  $F_2$  überein. Also ist für  $Y(t) := dF_1 \cdot X_1(t) = dF_2 \cdot X_2(t)$  die Bedingung  $Y'(t)^\top = 0$  äquivalent bezüglich jeder der beiden Flächen.  $\square$

**2.3. Parallelität als Differentialgleichung.** Wir wollen nun Parallelverschiebungen berechnen. Dazu benutzen wir lokale Koordinaten des Urbilds  $M$ , d.h. wir nehmen an, dass wir eine Karte  $(x, U)$  von  $M$  haben und betrachten nur  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die Abbildung  $F \circ x^{-1}$  ist dann Flächenstück im Sinne der elementaren Differentialgeometrie mit erster Fundamentalform (8). Für ein Vektorfeld  $X$  längs  $\gamma$  setzen wir  $X(t) = \sum \xi^i(t)e_i(\gamma(t))$ , d.h. wir betrachten auch den Hauptteil als Funktion von  $t$ . Die Linearität des Bildes  $\mathbb{R}^m$  bedeutet, dass wir  $dF(X)$  als vektorwertige Richtungsableitung  $\partial_X F = (\partial_X F^1, \dots, \partial_X F^m)$  verstehen können. Die Zeit-Ableitung von  $dFX$  hat die lokale Darstellung

$$(10) \quad \frac{d}{dt}(dF_{\gamma(t)} \cdot X(t)) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \xi'^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma}_{\in T_{c(t)}F} + \sum_{i,j=1}^n \gamma'^i \xi^j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \circ \gamma.$$

Da wir an der Tangentialkomponente interessiert sind, führen wir eine Bezeichnung ein. Dabei benutzen wir, dass für eine Immersion  $F$  die  $n$  Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) \in \mathbb{R}^m$  für jedes  $p \in M$  eine Basis von  $dF(T_p M)$  bilden.

**Definition.** Die *Christoffel-Symbole* zu einer Immersion  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  bezüglich der Karte  $(x, U)$  sind die Funktionen  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq i, j, k \leq n$ , definiert durch die Tangentialprojektion der zweiten Ableitungen,

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)^\top = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial F}{\partial x_k}(p),$$

Nach dem Satz von Schwarz ist  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Mit Hilfe der Christoffel-Symbole erhalten wir aus (10)

$$(11) \quad \left( (dF_{\gamma(t)} X)' \right)^\top = \sum_{k=1}^n \left( \xi'^k + \sum_{i,j}^n (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \gamma'^i \xi^j \right) \frac{\partial F}{\partial x_k} \circ \gamma.$$

Wenn  $X$  parallel ist, muss diese Linearkombination verschwinden; sie ist eine triviale Linearkombination, weil  $\frac{\partial F}{\partial x_k}$  Basis ist. Wir haben gezeigt:

**Satz 6.** Ein Vektorfeld  $X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) e_i(\gamma(t))$  längs  $\gamma$  ist genau dann parallel in  $U$ , wenn folgendes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für diejenigen  $t$  gilt, für die  $\gamma(t)$  im Definitionsbereich  $U$  einer Karte  $x$  liegt:

$$(12) \quad \xi'^k(t) + \sum_{i,j}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \gamma'^i(t) \xi^j(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein System linearer Differentialgleichungen für  $\xi$  (bzw.  $X$ ), dessen Koeffizienten  $\gamma$  und  $\Gamma$  glatt sind.

**Satz 7.** Es sei  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Immersion und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(t_0) = p$ . Für jedes  $X_0 \in T_p M$  existiert dann eine eindeutig bestimmte Parallelverschiebung  $X(t)$  längs  $\gamma$  mit Anfangswert  $X(t_0) = X_0$ .

*Beweis.* Der Anfangspunkt  $\gamma(t_0)$  liegt in einer Karte  $x$ . Der Existenzsatz für Lösungen linearer Differentialgleichungen liefert eine Lösung  $X(t)$ , die solange definiert ist wie  $\gamma(t)$  in der Menge  $U$  liegt, d.h. bis vor  $T := \sup\{t > t_0 : \gamma(t) \in U\}$ . (Dies liefert auch der Existenzsatz von Picard-Lindelöf, zusammen mit der Tatsache, dass  $|\xi|^2 := \sum_{i,j} g_{ij}(\xi^i, \xi^j)$  konstant in  $t$  bleibt.)

Wenn  $\gamma(T)$  definiert ist, liegt es in einer Karte  $(x_1, U_1)$ . Im Schnitt  $U \cap U_1$  müssen zwei Lösungen der Differentialgleichung (12) bzgl.  $x$  und  $x_1$  nach dem Eindeutigkeitsatz übereinstimmen, wenn sie einen Wert gemeinsam haben. Also können wir die Lösung sogar nach ganz  $U_1$  fortsetzen, unabhängig vom gewählten Anfangswert in  $U \cap U_1$ . Da für jedes

kompakte  $[a, b] \subset I$  die Menge  $\gamma([a, b]) \subset M$  von endlich vielen Karten  $x_k$  überdeckt wird, führt die Fortsetzung nach endlich vielen Schritten zu einer Parallelverschiebung von  $X$  längs  $[a, b]$ . Also erhalten wir eine Lösung längs der ganzen Kurve  $\gamma$ .  $\square$

Eine wichtige Eigenschaft der Koeffizienten der Differentialgleichung (12) beweist man in der elementaren Differentialgeometrie.

**Satz 8.** Die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$  einer Immersion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind allein durch die Riemannsche Metrik  $g$  aus (8) bestimmt. Tatsächlich ist für  $g_{ij} := \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$  und  $(g^{ij})$  die inverse Matrix von  $(g_{ij})$ :

$$(13) \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{lk} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \quad \text{für } 1 \leq i, j, l \leq n.$$

Dies bedeutet, dass Parallelverschiebung bereits auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  definiert ist, d.h. die Immersion  $F$  geht allein durch die Definition (8) ein.

Wir werden (13) durch die Koszul-Formel (22) in einem allgemeineren Rahmen beweisen; siehe die Bemerkungen nach Satz 14. Die Formel ist aber wenigstens plausibel dadurch, dass sowohl  $\partial g = 2\langle \partial^2 F, \partial F \rangle$  wie  $\Gamma$  zweite Ableitungen von  $F$  darstellen.

Für Immersionen  $F_1$  und  $F_2$ , die lokal isometrisch sind,  $g_1 = g_2$ , stimmen also die Parallelverschiebungen überein. Beispielsweise ist sie für abwickelbare Flächen durch die Parallelverschiebung auf dem ebenen Modell gegeben.

9. Vorlesung, Dienstag 10.11.09 \_\_\_\_\_

**2.4. Kovariante Ableitung längs Kurven.** Wir wollen ein Vektorfeld  $X$  in einer immersierten Mannigfaltigkeit  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  längs einer Kurve  $c$  ableiten; das Ergebnis soll tangential sein, also wieder ein Vektorfeld. Die einfachste Idee ist, die Ableitung des Vektorfelds im umgebenden Raum zu nehmen und sie in den Tangentialraum zu projizieren:

**Definition.** Sei  $X$  ein Vektorfeld längs  $\gamma: I \rightarrow M$ . Dann ist die *kovariante Ableitung von  $X$  längs  $\gamma$*  das eindeutig bestimmte Vektorfeld  $\frac{D}{dt}X$  längs  $\gamma$  mit

$$(14) \quad dF_{\gamma(t)} \cdot \frac{D}{dt}X(t) = \left( \frac{d}{dt} dF_{\gamma(t)} X(t) \right)^\top.$$

Nach dieser Definition ist äquivalent:  $X$  parallel  $\iff \frac{D}{dt}X = 0$ . Dies ist sinnvoll, denn parallele Felder sind ja Felder, die sich nur soviel ändern wie nötig, um im Tangentialraum zu bleiben – aus der Mannigfaltigkeit  $M$  heraus gesehen, sind sie konstant.

*Beispiel.* Wir betrachten  $\mathbb{S}^n$  als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Die Immersion  $F$  ist dann die Inklusion  $\iota: M := \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\iota(p) = p$ . Wegen  $d\iota = d\text{id} = \text{id}$  stimmt die Metrik dann mit dem Skalarprodukt von  $\mathbb{R}^{n+1}$  überein. Ist  $X$  ein Vektorfeld längs einer Kurve  $\gamma$ , so gilt

$$\frac{D}{dt}X(t) = \left(\frac{dX}{dt}(t)\right)^\top = \frac{dX}{dt}(t) - \left\langle \frac{dX}{dt}(t), \gamma(t) \right\rangle \gamma(t),$$

denn eine Normale im Punkt  $\gamma(t)$  ist  $\gamma(t)$  selbst.

Aus (11) folgt eine Darstellung der kovarianten Ableitung mit Hilfe der Christoffel-Symbole:

$$(15) \quad \frac{D}{dt}X = \frac{D}{dt} \sum_{k=1}^n \xi^k e_k \circ \gamma = \sum_{k=1}^n \left( \xi'^k + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \gamma'^i \xi^j \right) (e_k \circ \gamma)$$

Die kovariante Ableitung misst die Ableitung von  $X$  längs  $\gamma$  relativ zu parallelen Feldern. Wir rechnen diese Behauptung nach in einer Basisdarstellung. Betrachten wir dazu eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  mit  $0 \in I$  und wählen in  $\gamma(0) = p$  eine Basis  $(v_1(0), \dots, v_n(0))$ . Dann stellt die Parallelverschiebung  $(v_1(t), \dots, v_n(t))$  dieser Basis für jedes  $t$  wieder eine Basis von  $T_{\gamma(t)}M$  dar (Übung).

Wir schreiben nun  $X = \sum \xi^k v_k$  als eine Linearkombination bezüglich dieser Basis und erhalten

$$dF \cdot \frac{D}{dt}X = \left( \frac{d}{dt} dF \left( \sum_{k=1}^n \xi^k v_k \right) \right)^\top = \sum_{k=1}^n \xi'^k \underbrace{\left( dF \cdot v_k \right)^\top}_{\text{tangential}} + \xi^k \underbrace{\left( \frac{d}{dt} dF \cdot v_k \right)^\top}_{=0 \text{ da } v_k \text{ parallel}} = dF \left( \sum_{k=1}^n \xi'^k v_k \right),$$

d.h.  $\frac{D}{dt}X = \sum_{k=1}^n \xi'^k v_k$ . Insbesondere ist eine konstante Linearkombination paralleler Felder wieder parallel. Der Parallelitätsbegriff erlaubt also, einen Ableitungsbegriff zu formulieren, weil durch ihn Vektoren in verschiedenen Tangentialräumen verglichen werden können.

*Bemerkungen.* 1. Im Riemannschen Fall kann man in jedem Punkt  $p$  eine Orthonormalbasis  $(v_1(p), \dots, v_n(p))$  aus der Standardbasis  $e_1(p), \dots, e_n(p)$  gewinnen: Man muss dazu nur das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich der positiv definiten Bilinearform  $g_p$  verwenden. Nach Satz 4 bleibt eine parallele Fortsetzung  $v_i(t)$  längs einer Kurve sogar  $g$ -orthonormal für alle  $t$ .

2. In der elementaren Differentialgeometrie wird eine Kurve  $\gamma$  als *Geodätische* bezeichnet, wenn  $\gamma'$  ein paralleles Vektorfeld längs  $\gamma$  ist, d.h. wenn die kovariante Ableitung  $\frac{D}{dt}\gamma'$  für alle  $t$  verschwindet; siehe Kapitel 4 weiter unten.

**2.5. Kovariante Ableitung von Vektorfeldern.** Die Richtungsableitung eines Vektorfeldes  $Y$  in  $\mathbb{R}^n$  in Richtung eines Vektors  $X \in \mathbb{R}^n$  definiert man üblicherweise dadurch, dass man  $Y$  längs einer Kurve mit Tangentialvektor  $X$  nach der Zeit ableitet. Genauso leiten wir nun ein Vektorfeld  $Y$  in Richtung eines anderen Feldes  $X$  kovariant ab:

**Definition.** Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes  $Y$  auf  $M$  in Richtung eines Vektorfeldes  $X$  ist durch

$$(16) \quad \nabla_X Y(p) := \frac{D}{dt}(Y \circ \gamma)(0)$$

gegeben, wobei  $\gamma$  eine Kurve durch  $p$  mit  $\gamma'(0) = X_p$  ist.

Beachten Sie, dass  $Y \circ \gamma$  ein Vektorfeld längs  $\gamma$  ist, so dass man die kovariante Ableitung  $\frac{D}{dt}$  bilden kann. Dass (16) unabhängig von der gewählten Kurve  $\gamma$  ist, folgt aus der lokalen Darstellung (15): Im gegebenen Punkt  $p = \gamma(0)$  geht nur die Richtung  $X_p = \gamma'(0)$  in den Wert von  $\frac{D}{dt}Y$  ein.

Wir berechnen noch eine Deutung von  $dF \cdot \nabla_X Y$ :

$$\begin{aligned} dF_p \cdot \nabla_X Y(p) &\stackrel{(16)}{=} dF_{\gamma(0)} \cdot \frac{D}{dt}(Y \circ \gamma)(0) \stackrel{(14)}{=} \left( \frac{d}{dt} [dF_{\gamma(t)}(Y \circ \gamma)]_{t=0} \right)^\top \\ &\stackrel{dFY = \partial_Y F}{=} \left( \frac{d}{dt} [(\partial_Y F) \circ \gamma](0) \right)^\top = \left( \partial_X \partial_Y F(p) \right)^\top \end{aligned}$$

Hierbei steht  $\partial_Y F$  für die euklidische Richtungsableitung des Vektors  $F$ . Die kovariante Ableitung ist also die Tangentialprojektion der zweifachen euklidischen Richtungsableitung  $\partial_X \partial_Y F$ !

Wir geben noch die lokale Darstellung der kovarianten Ableitung an. Es sei dazu  $(x, U)$  Karte von  $M$  und  $X = \sum_i \xi^i e_i$  sowie  $Y = \sum_j \eta^j e_j$  Vektorfelder auf  $U$ . Aus

$$dF \cdot \nabla_X Y = (\partial_X \partial_Y F)^\top = \left[ \partial_X \left( \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right]^\top = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \eta^j \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^\top$$

folgt nach Definition der Christoffel-Symbole

$$(17) \quad \nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \right) e_k.$$

*Beispiel.* In  $\mathbb{R}^n$ , also für  $F = \text{id}$ ,  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , gilt  $\nabla_X Y = \partial_X Y$ ; die kovariante Ableitung ist also die Standard-Richtungsableitung von  $Y$  in Richtung  $X$ .

In (17) erhalten wir für  $M = \mathbb{R}^n$  also nur die erste Summe. Die zweite Summe können wir verstehen als einen Korrekturterm; er sorgt dafür, dass die Ableitung relativ zu parallelen Feldern genommen wird und damit Koordinaten-unabhängig ist.

Die folgenden Eigenschaften, von denen man (i) und (ii) direkt aus (17) abliest, werden wir im allgemeinen Fall axiomatisch fordern:

**Satz 9.** Sei  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  Immersion, und eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  durch  $F$  induziert. Die kovariante Ableitung auf  $M$  erfüllt für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  und  $f \in \mathcal{D}(M)$ :

(i) In der Richtung ist sie  $\mathcal{D}(M)$ -linear: d.h.  $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$ .



(ii) Im abzuleitenden Feld ist sie  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  $\nabla_X(cY + Z) = c\nabla_X Y + \nabla_X Z$  für  $c \in \mathbb{R}$ , und derivativ  $\nabla_X(fY) = (\partial_X f)Y + f\nabla_X Y$ .

(iii) Weiterhin gilt  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  und

(iv) die Produktregel  $\partial_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ .

Beachten Sie, dass (iii) eine weitere Charakterisierung der Lie-Klammer ist – nach Definition gilt  $[X, Y] = \partial_X Y - \partial_Y X$ .

*Beweis.* (iii) Aus (17) folgt wegen  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j - \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j} \xi^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k \xi^i \eta^j \right) e_k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i} \xi^k \right) e_k = [X, Y] \end{aligned}$$

(iv) Sei  $\gamma$  Kurve durch  $p$  mit  $\gamma'(0) = Z$ . Wir schreiben  $\tilde{X} := X \circ \gamma$  und  $\tilde{Y} := Y \circ \gamma$  für die Felder längs  $\gamma$ . Mit jeweils in  $t = 0$  auszuwertenden  $t$ -Ableitungen gilt dann:

$$\begin{aligned} \partial_Z g(X, Y) &= \partial_Z \langle dF \cdot X, dF \cdot Y \rangle \stackrel{\text{Def. Lie}}{=} \frac{d}{dt} \langle dF \cdot \tilde{X}, dF \cdot \tilde{Y} \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} (dF \cdot \tilde{X}), dF \cdot \tilde{Y} \right\rangle + \left\langle dF \cdot \tilde{X}, \frac{d}{dt} (dF \cdot \tilde{Y}) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Def. kov. Abl.}}{=} \left\langle dF \cdot \frac{D}{dt} \tilde{X}, dF \cdot \tilde{Y} \right\rangle + \left\langle dF \cdot \tilde{X}, dF \cdot \frac{D}{dt} \tilde{Y} \right\rangle \\ &= g\left(\frac{D}{dt} \tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt} \tilde{Y}\right) \stackrel{(16)}{=} g_p(\nabla_Z X, Y) + g_p(X, \nabla_Z Y) \quad \square \end{aligned}$$

## 2.6. Übungsaufgaben.

### Aufgabe 12 – CHRISTOFFEL-SYMBOLS DES ZYLINDERS:

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Zylinders dargestellt als Graph über  $\mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$ .

### Aufgabe 13 – PARALLELVERSCHIEBUNG AUF $\mathbb{S}^2$ :

Betrachten Sie zwei Großkreisbögen  $c_1$  und  $c_2$ , welche den Nordpol  $(0, 0, 1)$  und den Südpol  $(0, 0, -1)$  der Einheitssphäre verbinden und sich in den Polen rechtwinklig schneiden. Es sei ferner  $X$  der Tangentialvektor von  $c_1$  im Norpol.

Welchen Winkel bilden die Parallelverschiebungen von  $X$  entlang  $c_1$  und  $c_2$  am Südpol? (Skizze genügt!)

**Aufgabe 14** – PARALLELVERSCHIEBUNG AUF DEM KEGEL:

Einen Kegel kann man durch *isometrisches Aufrollen* eines ebenen Sektors  $M \subset \mathbb{R}^2$  mit Öffnungswinkel  $\alpha > 0$  erhalten. Dabei sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  die entsprechende Parametrisierung des Kegels. Auf  $M$  haben wir die Standard-Fundamentalform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

- Begründen Sie anschaulich, dass die Immersion  $f$  eine Isometrie ist.
- Was sind daher die Christoffel-Symbole der Immersion  $f$ ?

Ein Breitenkreis des Kegels werde durch ein Kreissegment in  $M$  parametrisiert.

- Wie sieht ein paralleles Vektorfeld  $X$  in  $M$  längs des Kreissegments aus? Warum ist sein isometrisches Bild  $df \cdot X$  ebenfalls parallel?
- Geben Sie den Drehwinkel an, den das drehende Feld  $df \cdot X$  bei einem vollen Umlauf um den Breitenkreis ausführt.

**Aufgabe 15** – PARALLELVERSCHIEBUNG ENTLANG BREITENKREIS VON  $\mathbb{S}^2$ :

Untersuchen Sie die Parallelverschiebung längs eines Breitenkreises von  $\mathbb{S}^2$  mit Höhe  $0 < h < 1$  über dem Äquator.

Finden Sie dazu einen an  $\mathbb{S}^2$  im Breitenkreis tangentialen Kegel. Wickeln Sie diesen Kegel auf ein Winkelsegment der Ebene ab. Welchen Winkel hat das entstehende Segment? Bestimmen Sie nun die Parallelverschiebung mithilfe der vorigen Übung.

**Aufgabe 16** – PARALLELITÄT IM NORMALENBÜNDEL VON KURVEN:

Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve. Sei  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Normalenfeld an  $c$ , d.h. es gilt  $\langle X, c' \rangle = 0$ . Das Feld  $X$  heißt *parallel im Normalenbündel längs  $c$* , wenn gilt  $\frac{D}{dt} X := \left(\frac{d}{dt} X\right)^\perp = 0$ .

- Zeigen Sie, dass analog zu Satz 7 der Vorlesung gilt: Sind  $X, Y$  parallel im Normalenbündel längs  $c$ , so bleibt  $\langle X, Y \rangle$  konstant. Insbesondere bleiben die Länge  $|X|$  und der für  $X \neq Y$  erklärte Winkel  $\angle(X, Y)$  erhalten.
- Es gibt eine Basis  $N_1(t), \dots, N_{n-1}(t)$ , des Normalenraums  $\{c'(t)\}^\perp$ , die differenzierbar von  $t$  abhängt.
- Zu jedem gegebenen Normalenvektor  $X(0)$  in  $c(0)$  gibt es eine *parallele* Fortsetzung längs der Kurve  $c$ , d.h.  $\frac{D}{dt} X \equiv 0$ .
- Es gibt eine parallele Orthonormalbasis längs  $c$ .
- Geben Sie eine solche Orthonormalbasis für  $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  an. Wie sieht eine geschlossene Kurve  $c: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus, für die die parallele Orthonormalbasis sich nicht "schließt", d.h. nicht auf  $\mathbb{S}^1$  erklärt ist?

## 3. ZUSAMMENHÄNGE

Im letzten Abschnitt haben wir die kovariante Ableitung beschrieben, wie sie jede Immersion  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  induziert. Dabei hatten wir zuerst die Parallelverschiebung längs Kurven beschrieben und damit den Begriff der kovarianten Ableitung eingeführt.

Ist keine solche Immersion gegeben, so können wir immer noch axiomatisch diejenigen Eigenschaften fordern, die wir im letzten Abschnitt hergeleitet hatten. Dabei werden wir hier jedoch umgekehrt vorgehen, und zuerst die Ableitung und dann die Parallelverschiebung einführen.

Der Begriff *Zusammenhang* bezieht sich auf die Parallelverschiebung von einem Tangentialraum zu einem anderen. Er hat nichts mit dem topologischen Zusammenhangsbegriff zu tun (wegzusammenhängend etc.).

**3.1. Affine Zusammenhänge.** In einem ersten Schritt benutzen wir zwei der vier Eigenschaften der kovarianten Ableitung, um einen allgemeinen Ableitungsbegriff auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu erklären:

**Definition.** Ein *affiner Zusammenhang*  $\nabla$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

die für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{D}(M)$  erfüllt:

- (i)  $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$ ,
- (ii)  $\nabla_X(cY + Z) = c\nabla_X Y + \nabla_X Z$  und  $\nabla_X(fY) = (\partial_X f)Y + f\nabla_X Y$ .

Die bekannte lokale Darstellung von  $\nabla_X Y$  erhalten wir, indem wir für eine Karte  $x$  mit Basisfeldern für zwei Vektorfelder  $X = \sum \xi^i e_i$  und  $Y = \sum \eta^j e_j$  ausrechnen

$$\nabla_X Y = \nabla_{\sum \xi^i e_i} Y \stackrel{(i)}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i \nabla_{e_i} Y = \sum_{i=1}^n \xi^i \nabla_{e_i} (\sum \eta^j e_j) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i,j=1}^n \left( \xi^i (\partial_{e_i} \eta^j) e_j + \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j \right).$$

Nun definieren wir:

**Definition.** Die *Christoffel-Symbole* eines affinen Zusammenhangs  $\nabla$  sind die für jede Karte  $(x, U)$  erklärten Funktionen  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$ .

Die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$  sind differenzierbar, müssen aber nicht symmetrisch in  $i, j$  sein. Wiederum fungieren sie als Korrekturterme der Koordinaten-Ableitungen – dies besagt

gerade die zu (17) analoge lokale Darstellung

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) e_k.$$

**3.2. Parallelverschiebung eines affinen Zusammenhangs.** In Umkehrung unseres Vorgehens im Immersions-Fall wollen wir zu einem gegebenen affinen Zusammenhang nun eine kovariante Ableitung  $\frac{D}{dt}X$  für eine gegebene Kurve  $c(t)$  definieren.

Sei dazu ein Vektorfeld  $\tilde{X}$  längs einer Kurve  $c$  gegeben, d.h.  $\tilde{X}(t) \in T_{c(t)}M$ . Wir müssen  $\tilde{X}$  fortsetzen zu einem Vektorfeld  $X$ , das in einer Umgebung des Bildes von  $c$  erklärt ist. Natürlich geht dies im allgemeinen nicht, denn zu Doppelpunkten der Kurve können verschiedene Werte des Vektorfeldes  $X$  gehören. Für immensierte Kurven kann man aber eine lokale Fortsetzung erklären:

**Lemma 10.** *Sei  $c: I \rightarrow M$  immensierte Kurve, und  $p := c(t_0)$  für  $t_0 \in I$ . Zu jedem Vektorfeld  $\tilde{X}$  längs  $c$  gibt es ein in einer offenen Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  definiertes Vektorfeld*

$$(18) \quad X \in \mathcal{V}(U) \quad \text{mit} \quad X(c(t)) = \tilde{X}(t)$$

für alle  $t$  in einem geeigneten Intervall  $I_0$  mit  $t_0 \in I_0 \subset I$ .

Damit können wir nun folgendermaßen die kovariante Ableitung längs  $c$  definieren:

• Ist  $c'(t_0) \neq 0$ , so ist  $c$  immensiert in einer Umgebung von  $t_0$ , und das Lemma ergibt eine Fortsetzung  $X$  von  $\tilde{X}$  wie in (18) mit  $X = \sum \xi^i e_i$  bezüglich  $(x, U)$ :

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{D}{dt} \tilde{X}(t) &:= \nabla_{c'(t)} X(c(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \gamma^i(t) \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i}(c(t)) + \sum_{i,j=1}^n \gamma^i(t) \xi^j(c(t)) \Gamma_{ij}^k(c(t)) \right) e_k(c(t)). \end{aligned}$$

Hierbei sei  $\gamma'$  der Hauptteil von  $c'$ .

• Ist  $c'(t_0) = 0$ , so setzen wir  $\frac{D}{dt} \tilde{X}(t_0) := \frac{d}{dt} \tilde{X}(t_0)$ .

Wir behaupten, dass unsere Definition von  $\frac{D}{dt} \tilde{X}(t)$  nur abhängt von  $c(t)$ ,  $c'(t)$ ,  $\tilde{X}(t)$ , nicht aber von der gewählten Fortsetzung  $X$ . Der zweite Summand in (19) ist sicherlich von der gewählten Fortsetzung unabhängig. Andererseits ist im ersten Summand  $\frac{\partial \xi^k}{\partial x_i}(c(t)) = \frac{\partial(\xi^k \circ x^{-1})}{\partial u_i}(x(c(t)))$  bzw.  $\frac{\partial(\xi^k \circ x^{-1})}{\partial u_i}(\gamma(t))$  von der gewählten Fortsetzung  $X$  von  $\tilde{X}$  abhängig. Jedoch stellt dieser Term eine euklidische Richtungsableitung dar, denn

$$\frac{d}{dt} \tilde{\xi}(t) = \frac{d}{dt} (\xi \circ x^{-1} \circ x \circ c)(t) = \sum_i \gamma^i \frac{\partial(\xi \circ x^{-1})}{\partial u_i}(x(c(t))) = \sum_k \sum_i \gamma^i \frac{\partial(\xi^k \circ x^{-1})}{\partial u_i}(x(c(t))) b_k.$$

Weil aber  $\xi$  entlang der Kurve  $x \circ c$  vorgegeben ist, ist dies von der gewählten Fortsetzung von  $\xi$  unabhängig.

*Beweis.* Wir benutzen zwei Tatsachen, die wir hier nicht beweisen (siehe Vorlesung Mannigfaltigkeiten oder [L]):

1. Jede Immersion  $f: N^\ell \rightarrow M^n$  von Mannigfaltigkeiten ist lokal eine Einbettung. (In unserem Fall ist  $f = c$ ,  $N = I$  und  $\ell = 1$ .)
2. Gegeben eine Einbettung  $c: I \rightarrow M^n$ , so gibt es für jedes  $t_0 \in I$  erstens eine Umgebung  $J$  und eine Parametertransformation  $\varphi: J \rightarrow I$  und zweitens eine Karte  $(x, U)$  von  $M$  um  $p = c(t_0)$ , so dass

$$(x \circ c)(\varphi(t)) = (t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{für alle } t \in J \subset I.$$

Dann ist durch  $\tilde{X}(t)$  ein Hauptteil  $\tilde{\xi}(t)$  gegeben. Wenn  $v$  die Koordinate von  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist, so setzen wir nun den Hauptteil  $\xi$  von  $X$  konstant in  $v$  fort:  $\xi(t, v) := \tilde{\xi}(t)$ . Das dadurch gegebene Vektorfeld  $X$  auf  $U$  ist differenzierbar und setzt  $\tilde{X}$  fort.  $\square$

Für jeden affinen Zusammenhang ergibt sich daraus ein Parallelitätsbegriff:

**Definition.** Ein Vektorfeld  $\tilde{X}$  längs  $c$  heißt *parallel*, wenn  $\frac{D}{dt}\tilde{X} = 0$  für alle  $t$ .

Wie in Satz 7 erhalten wir die Existenz eines parallelen Vektorfeldes zu gegebenem Anfangswert aus dem entsprechenden Satz für lineare Differentialgleichungen, d.h. wir erhalten zu jedem Zusammenhang eine Parallelverschiebung längs Kurven.

Aus der Parallelverschiebung kann man den Zusammenhang folgendermaßen zurückerhalten:

**Satz 11.** *Es seien  $X, Y$  Vektorfelder, und  $c$  eine Kurve durch  $p = c(0)$  mit  $c'(0) = X_p$ . Ferner sei  $\tau_t: T_p M \rightarrow T_{c(t)} M$  die Parallelverschiebung längs  $c$ . Dann gilt*

$$\nabla_X Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_t^{-1}(Y_{c(t)}) - Y_p).$$

*Beweis.* Für  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  eine parallele Basis längs  $c$  und  $Y(c(t)) = \sum_i \eta^i(t) v_i(t)$  gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= \frac{D}{dt} \sum_i \eta^i(t) v_i(t) \Big|_{t=0} \stackrel{v_i \text{ parallel}}{=} \sum_i \frac{d\eta^i}{dt}(0) v_i(0) = \sum_i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta^i(t) - \eta^i(0)}{t} v_i(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \sum_i \eta^i(t) \tau_t^{-1}(v_i(t)) - \eta^i(0) v_i(0) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \tau_t^{-1}(Y_{c(t)}) - Y_p \right) \end{aligned} \quad \square$$

Welche Eigenschaft der Parallelverschiebung haben wir beim letzten Gleichheitszeichen benutzt?

**3.3. Symmetrie und Verträglichkeit von Zusammenhängen.** Es gibt viele affine Zusammenhänge auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit. Im semi-Riemannschen Fall werden wir sehen, dass ein Zusammenhang durch folgende Forderungen eindeutig festgelegt wird:

**Definition.** (i) Ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *symmetrisch*, wenn seine *Torsion*  $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  für alle  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  verschwindet.

(ii) Ein Zusammenhang auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *verträglich mit der Metrik*, wenn er  $\partial_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$  für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  erfüllt.

*Beispiel.* Eine durch eine Immersion  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  induzierte kovariante Ableitung  $\nabla_X Y = (\partial_X \partial_Y F)^\top$  hat diese Eigenschaften: Dies ist die Aussage (iii) und (iv) aus Satz 9.

Wir behaupten: Aus (i) folgt, dass die Christoffel-Symbole für jede Karte symmetrisch sind,

$$(20) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

In der Tat haben die Basisfelder  $e_i$  konstante Koeffizienten, also  $\partial_{e_i} e_j = 0$ , und daher auch  $[e_i, e_j] = \frac{\partial}{\partial x_i} e_j - \frac{\partial}{\partial x_j} e_i = 0$  für alle  $i, j$ . Es folgt  $0 \stackrel{(i)}{=} \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) e_k$  und, weil die  $(e_k)$  eine Basis bilden, ergibt sich (20).

Die in Satz 4 gezeigte Konstanz von Längen und Winkeln paralleler Felder längs Kurven ist äquivalent zur Eigenschaft (ii):

**Satz 12.** Ein Zusammenhang  $\nabla$  ist genau dann verträglich mit  $g$ , wenn längs jeder Kurve für je zwei parallele Vektorfelder  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  der Wert  $g(\tilde{X}, \tilde{Y})$  konstant bleibt.

Insbesondere haben parallele Vektorfelder also konstante Länge.

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ” Sei  $c: I \rightarrow M$  Kurve, und  $t_0 \in I$ . Wir nehmen zuerst an  $c'(t_0) \neq 0$ . Dann ist  $c$  lokal Immersion und damit sogar lokal Einbettung. Aus den gegebenen Vektorfeldern längs  $c$  erhalten wir dann nach Lemma 10 lokal definierte Felder  $X, Y, Z$  mit  $\tilde{X} = X \circ c$ ,  $\tilde{Y} = Y \circ c$  sowie  $c' = Z \circ c$ , und es gilt in einer Umgebung von  $t_0$ :

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} g(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \partial_Z g(X, Y) \stackrel{\nabla \text{ verträglich}}{=} g_p(\nabla_Z X, Y) + g_p(X, \nabla_Z Y) \\ &= g\left(\frac{D}{dt} \tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt} \tilde{Y}\right) \stackrel{\tilde{X}, \tilde{Y} \text{ parallel}}{=} 0. \end{aligned}$$

Verschwindet  $c'$  auf einem Intervall, so sind nach Definition der Parallelität  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  dort konstant, also auch  $g(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Wegen Stetigkeit von  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  gilt damit die Behauptung insgesamt.

“ $\Leftarrow$ ” Wir zeigen die Verträglichkeitsbedingung in  $p \in M$ . Für  $Z(p) = 0$  verschwinden beiden Seiten der Verträglichkeitsbedingung ohnehin. Ist  $Z(p) \neq 0$ , so wählen wir  $c$  als eine

eingebettete Kurve durch  $p$  mit  $Z(p) = c'(0) \neq 0$ . Weiter sei  $(v_i(0))$  eine Orthonormalbasis von  $T_pM$  und  $(v_i(t))$  ihre Parallelverschiebung längs  $c$ . Nach Voraussetzung ist dann auch die parallel verschobene Basis  $(v_i(t))$  eine Orthonormalbasis.

Die Einschränkung eines beliebigen Feldes  $X$  auf  $c$  schreiben wir lokal als  $\tilde{X}(t) = X(c(t)) = \sum \xi^i(t)v_i(t)$ . Es folgt für  $t$  nahe bei 0

$$\frac{D}{dt}\tilde{X} = \frac{D}{dt}\sum_i \xi^i v_i = \sum_i \frac{d\xi^i}{dt}v_i + \xi^i \underbrace{\frac{D}{dt}v_i}_{=0} = \sum_i \frac{d\xi^i}{dt}v_i.$$

Setzt man diesen Ausdruck und einen entsprechenden für  $\tilde{Y}(t) = \sum \eta^j(t)v_j(t)$  ein in  $g$ , so ergibt sich zunächst die gewünschte Verträglichkeitsbedingung längs  $c$ :

$$g\left(\frac{D}{dt}\tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt}\tilde{Y}\right) \stackrel{v_i \text{ ONB}}{=} \sum_i \frac{d\xi^i}{dt}\eta^i + \xi^i \frac{d\eta^i}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\xi^i\eta^i) \stackrel{v_i \text{ ONB}}{=} \frac{d}{dt}g(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

Die Außenseiten der Gleichung ergeben  $g_p(\nabla_Z X, Y) + g_p(X, \nabla_Z Y) = \partial_Z g(X, Y)$ .  $\square$

**3.4. Levi-Civita-Zusammenhang und Koszul-Formel.** Um die Existenz eines symmetrischen und verträglichen Zusammenhangs nachzuweisen, benötigen wir eine Aussage der Linearen Algebra: Wenn ein Vektorraum eine nicht-entartete Bilinearform besitzt, so ist er zu seinem Dualraum kanonisch isomorph.

**Lemma 13.** *Sei  $M$  Mannigfaltigkeit und  $\omega: \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  eine  $\mathcal{D}(M)$ -lineare Abbildung, d.h. eine 1-Form auf  $M$ . Ist  $g$  eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$ , so gibt es genau ein Vektorfeld  $X \in \mathcal{V}(M)$  mit  $\omega(Z) = g(X, Z)$  für alle  $Z \in \mathcal{V}(M)$ .*

Sie kennen vielleicht die entsprechende Aussage (ohne Fußpunkt-Abhängigkeit) für Hilbert-räume: den Rieszschen Darstellungssatz aus der Funktionalanalysis.

*Beweis.* Wir prüfen dies lokal nach. Sei  $x$  eine Karte um  $p \in M$ . Ferner sei  $(v_j)$  eine Basis von  $T_pM$ . Wir suchen  $X = \sum \xi^i v_i$  mit  $\omega(v_j) \stackrel{!}{=} g(X, v_j) = \sum_i \xi^i g_{ij}$  für  $j = 1, \dots, n$ .

Ist  $(g^{ij})$  die zu  $(g_{ij})$  inverse Matrix, so folgt

$$\sum_j g^{kj}\omega(v_j) = \sum_{i,j} g^{kj}\xi^i g_{ij} = \xi^k \quad \text{für jedes } k = 1, \dots, n.$$

Damit haben wir die gewünschte Darstellung für  $X$  bestimmt; sie ist differenzierbar.  $\square$

Wir formulieren nun einen Satz, der gar nicht selbstverständlich ist:

**Satz 14 (Levi-Civita).** *Auf jeder semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  gibt es genau einen Zusammenhang  $\nabla$ , der symmetrisch und mit der Metrik verträglich ist.*

Dieser Zusammenhang heißt *Levi-Civita-* (oder auch *semi-Riemannscher*) *Zusammenhang*. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik (Korollar 3), und damit existiert auch stets ein Riemannscher Zusammenhang.

*Beweis.* Nehmen wir an  $\nabla$  existiert. Aus den Eigenschaften von  $\nabla$  gewinnen wir dann eine Darstellungsformel für  $\nabla_X Y$ . Aus der Verträglichkeitsbedingung folgern wir

$$\begin{aligned}\partial_X g(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ \partial_Y g(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ -\partial_Z g(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y).\end{aligned}$$

Dies addieren wir unter Benutzung der Torsionsbedingung:

$$\partial_X g(Y, Z) + \partial_Y g(Z, X) - \partial_Z g(X, Y) = g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g(Z, \nabla_X Y + \underbrace{\nabla_Y X}_{=\nabla_X Y - [X, Y]}),$$

Wir erhalten die *Koszul-Formel*

$$(22) \quad g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left( \partial_X g(Y, Z) + \partial_Y g(Z, X) - \partial_Z g(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \right).$$

Wir wollen Lemma 13 anwenden, wobei wir  $X, Y$  als fest betrachten und  $\omega(Z)$  die rechte Seite von (22) definieren. Dazu müssen aber zuerst  $\omega(fZ) = f\omega(Z)$  für jedes  $f \in \mathcal{D}(M)$  nachweisen. Sicher sind der dritte und vierte Term der rechten Seite von (22) jeweils  $\mathcal{D}(M)$ -linear in  $Z$ . Ist  $f \in \mathcal{D}(M)$ , so gilt einerseits

$$\partial_Y g(fZ, X) = \partial_Y (fg(Z, X)) = \partial_Y f g(Z, X) + f \partial_Y g(Z, X).$$

Es gilt  $[Y, fZ] = \partial_Y(fZ) - f\partial_Z Y = \partial_Y f Z + f[Y, Z]$ , wobei der mittlere Ausdruck nur bezüglich einer Karte definiert ist. Daraus folgt andererseits

$$-g([Y, fZ], X) = -\partial_Y f g(Z, X) - f g([Y, Z], X).$$

Also ist die Summe aus zweitem und fünftem Term ebenfalls  $\mathcal{D}(M)$ -linear in  $Z$ . Das gleiche gilt für die Summe aus erstem und sechstem Term, und der Nachweis ist erbracht.

Ist  $\nabla_X Y$  gegeben, so zeigt Lemma 13, dass  $\nabla_X Y$  durch die rechte Seite von (22) eindeutig aus differenzierbarer Struktur, aus  $g$  und  $X, Y$  hervorgeht.

Aber die rechte Seite definiert auch eine Form  $\omega$ , so dass durch das Lemma ein von  $X, Y$  abhängiges Vektorfeld  $\nabla_X Y$  definiert wird. Wir müssen allerdings noch nachweisen, dass  $\nabla_X Y$  dann tatsächlich ein affiner Zusammenhang ist, der torsionsfrei und mit der Metrik verträglich ist. Den Nachweis der entsprechenden vier Eigenschaften lassen wir als Übung.  $\square$



## 12. Vorlesung, Mittwoch 17.11.09

Aus der Koszul-Formel folgt: Die Räume  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$  haben unabhängig vom Index  $k$  alle dieselbe kovariante Ableitung  $\nabla_X Y = \partial_X Y$ , denn die rechte Seite von (22) verschwindet für Basisfelder  $e_i$ , d.h. alle Christoffel-Symbole verschwinden.

Ist  $x$  Karte mit Basisfeldern  $e_i$ , sowie Christoffel-Symbolen  $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$ , so verschwinden die Lie-Klammern  $[e_i, e_j]$  etc. und deshalb folgt mit  $X := e_i$ ,  $Y := e_j$ ,  $Z := e_k$  aus der Koszul-Formel die lokale Darstellung

$$(23) \quad \sum_{l=1}^n g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \quad \text{für jedes } 1 \leq i, j, k \leq n,$$

also (13).

*Bemerkung.* In der elementaren Differentialgeometrie ist das theorema egregium der entscheidende Satz, dessen Aussage unerwartet kommt. Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1. Die Christoffel-Symbole sind durch die erste Fundamentalform bestimmt.
2. Die Gauß-Gleichung erlaubt es, die Gauß-Krümmung  $K$  als Determinante der zweiten Fundamentalform durch Christoffelsymbole und ihre Ableitungen auszudrücken.

Es ist die Aussage 1., die wir hier auf den abstrakten Kontext verallgemeinert haben.

Wir werden von nun an stets den Levi-Civita Zusammenhang betrachten. Wenn wir  $(M, g)$  schreiben, meinen wir stets diesen Zusammenhang.

## 3.5. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 17** – LOKALITÄT DES ZUSAMMENHANGS:

Warum hängt für einen affinen Zusammenhang der Wert  $(\nabla_X Y)(p)$  nur von den Werten von  $X$  und  $Y$  in einer Umgebung von  $p$  ab?

**Aufgabe 18** – KOVARIANTE ABLEITUNG AUF DER SPHÄRE  $\mathbb{S}^2$ :

Zu einem Winkel gegenüber der Horizontalen  $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  sei durch

$$t \mapsto \gamma(t, \vartheta) := (\cos \vartheta \cos t, \cos \vartheta \sin t, \sin \vartheta), \quad t \in [0, 2\pi),$$

ein Breitenkreis auf der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  gegeben. Seine Einheitstangente sei  $X(t, \vartheta) := \frac{\gamma'(t, \vartheta)}{|\gamma'(t, \vartheta)|}$ , wobei  $\gamma'(t, \vartheta)$  die Ableitung nach  $t$  bedeutet.

- a) Berechnen Sie die kovariante Ableitung  $\frac{D}{dt} X(t, \vartheta) = \left( \frac{d}{dt} X(t, \vartheta) \right)^\top$ . Was ist die kovariante Ableitung von  $X(t, \vartheta)$  längs des Äquatorkreises?
- b) Berechnen Sie die Projektionen  $\left\langle \frac{D}{dt} X(t, \vartheta), \gamma(t, \vartheta) \right\rangle$  und  $\left\langle \frac{D}{dt} X(t, \vartheta), X(t, \vartheta) \right\rangle$  für  $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch (*Tipp*: normal, tangential,  $\frac{d}{dt} \|X\|$ ).

Das Feld  $X(t, \vartheta)$  ist für  $\vartheta \neq 0$  nicht parallel. Wir konstruieren nun ein paralleles Feld.

- c) Bestimmen Sie ein  $Y(t, \vartheta)$ , so dass  $\{X(t, \vartheta), Y(t, \vartheta)\}$  eine orthonormale Basis der Tangentialebene an  $T_{\gamma(t, \vartheta)}\mathbb{S}^2$  bildet.
- d) Bestimmen Sie einen (konstanten) Drehwinkel  $\alpha = \alpha(\vartheta)$ , so dass das rotierende Feld  $Z(t, \vartheta) := \cos(\alpha t)X(t, \vartheta) + \sin(\alpha t)Y(t, \vartheta)$  längs des Breitenkreises  $\gamma(\cdot, \vartheta)$  parallel wird.

**Aufgabe 19** – TEST:

- a) Die Parallelverschiebung auf  $\mathbb{R}^n$  mit Levi-Civita-Zusammenhang stimmt bezüglich aller Minkowski-Metriken  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  überein: Ja/nein.
- b) Existiert eine Isometrie  $f: M \rightarrow N$  zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten, so stimmen die Christoffel-Symbole bezüglich beliebiger Karten  $x$  von  $M$  und  $y$  von  $N$  überein: Ja/nein.
- c) Für die Lieklammer von Vektoren der Standardbasis gilt: . . . . .

**Aufgabe 20** – PARALLELVERSCHIEBUNG:

Sei  $c$  eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\tau_t: T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$  die Parallelverschiebung längs  $c$ . Zeigen Sie:  $\tau_t$  ist linear und bildet eine Basis auf eine Basis ab.

**Aufgabe 21** – EIGENSCHAFTEN DES LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANGS:

Betrachten Sie den Levi-Civita Zusammenhang, der durch die Koszul-Formel definiert ist. Weisen Sie für ihn die vier Eigenschaften nach, die ein torsionsfreier und mit der Metrik verträglicher Zusammenhang erfüllen muss. (Am besten in vier Gruppen, jeder eine Eigenschaft.)

**Aufgabe 22** – CHRISTOFFELSYMBOLE IN  $\mathbb{R}^n$ :

Zeigen Sie: Bei linearem Koordinatenwechsel  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  verschwinden die Christoffelsymbole der durch  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  induzierten Metrik, bei nichtlinearem  $f$  jedoch nicht.

**Aufgabe 23** – PRODUKTMANNIGFALTIGKEITEN:

Es seien  $M_1$  und  $M_2$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $M := M_1 \times M_2$  ihr Produkt. Sind  $g_1$  und  $g_2$  Riemannsche Metriken auf  $M_1$  bzw.  $M_2$ , so definieren wir die *Produktmetrik* auf  $M$  durch  $g_{(p,q)}(X, Y) := g_{1p}(d\pi_1 \cdot X, d\pi_1 \cdot Y) + g_{2q}(d\pi_2 \cdot X, d\pi_2 \cdot Y)$  für alle  $(p, q) \in M$  und  $X, Y \in T_{(p,q)}M$ , wobei  $\pi_i$  die Projektion von  $M$  auf  $M_i$  sei ( $i = 1, 2$ ). Verifizieren Sie, daß  $g$  tatsächlich eine Riemannsche Metrik ist.

Benutzen Sie die Koszul-Formel, um für den Levi-Civita-Zusammenhang auf der Produktmannigfaltigkeit zu zeigen:  $\nabla_X Y = (\nabla_{d\pi_1 X}^1 d\pi_1 Y, \nabla_{d\pi_2 X}^2 d\pi_2 Y)$

#### 4. GEODÄTISCHE UND EXPONENTIALABBILDUNG

Wir wollen nun spezielle Kurven betrachten, mit deren Hilfe man verschiedene Geometrien von Mannigfaltigkeiten studieren und unterscheiden kann.

4.1. **Geodätische.** In  $\mathbb{R}^n$  hat jede Gerade die folgenden beiden Eigenschaften:

1. (variationell:) Jede Teilstrecke der Gerade ist die kürzeste Kurve zwischen ihren Endpunkten.
2. (Krümmung:) Parametrisiert  $c$  die Gerade nach Bogenlänge, so gilt  $c'' = 0$ . (Physikalisch entspricht die Gerade also der Bahn eines unbeschleunigten Massenpunktes.)

Für Großkreise in der Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  haben wir ähnliche, aber nicht wörtlich gleiche Eigenschaften:

1. (variationell:) Nur bis zur Länge  $\pi$  sind Großkreisbögen Minima der Bogenlänge von Kurven, die die Endpunkte verbinden (darüber sind sie immerhin noch “kritisch für die Bogenlänge”).
2. (Krümmung:) Parametrisiert  $c$  den Großkreis nach Bogenlänge, so gilt zwar nicht  $c'' = 0$ , aber die Tangentialprojektion erfüllt  $(c'')^\top = 0$ .

Der Begriff der Geodätischen verallgemeinert diese Kurven auf Mannigfaltigkeiten. Wir nehmen 2. zur Definition und leiten daraus 1. her; man kann auch umgekehrt vorgehen.

**Definition.** Eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  heißt *Geodätische*, wenn das Vektorfeld  $c'$  längs  $c$  parallel ist, also  $\frac{D}{dt}c' = 0$  für alle  $t \in I$  gilt.

Eine Geodätische hat demnach einen Tangentialvektor, der “so konstant wie möglich” ist. Tatsächlich kann man für  $\|c'\| = 1$  die Größe  $\frac{D}{dt}c'$  als die intrinsische Krümmung der Kurve  $c$  verstehen – man sagt  $\frac{D}{dt}c' \in T_{c(t)}M$  ist der *geodätische Krümmungsvektor* von  $c$ . Warum ist  $\frac{D}{dt}c'$  senkrecht auf  $c'$  falls  $\|c'\| \equiv \text{const}$ ?

Aus der Definition folgt mit Hilfe von Satz 12:

**Satz 15.** *Jede Geodätische ist mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert,  $\|c'\| \equiv \text{const}$ .*

*Beispiele.* 1. In  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$  führt Integration der Bedingung  $c'' = 0$  auf die Lösung  $c_{p,v}(t) = p + tv$  für  $p, v \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Für  $(B^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$  haben die Lösungen die gleiche Form. Für  $p \in B^n$ ,  $v \neq 0$  existieren sie nur für ein beschränktes Zeitintervall.

3. Für  $M = (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sind proportional zur Bogenlänge parametrisierte Großkreise tatsächlich Geodätische: Seien  $p \in \mathbb{S}^n$  und  $v \in T_p\mathbb{S}^n \perp p$ . Für  $v = 0$  setzen wir  $c \equiv p$  und sonst

$$(24) \quad c_{p,v}(t) := \cos(t|v|)p + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt  $c'_{p,v}(t) = -|v|\sin(t|v|)p + |v|\cos(t|v|)\frac{v}{|v|}$ , und daher  $(c''_{p,v}(t))^\top = 0$ .

Wir schreiben eine Geodätische  $c$  lokal als  $\gamma = x \circ c$  mit Hauptteil  $\gamma'$ . Dann gilt

$$0 = \frac{D}{dt}c' = \sum_k \left( \frac{d}{dt}\gamma'^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) e_k \circ c$$

bzw. das (nicht-lineare) Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in  $\gamma$

$$(25) \quad 0 = \gamma''^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j \Gamma_{ij}^k \circ x^{-1} \circ \gamma, \quad k = 1, \dots, n.$$

Innerhalb einer Karte können wir die Existenzaussage des Satzes von Picard-Lindelöf anwenden, um das Gleichungssystem (25) lokal zu lösen:

**Satz 16.** *Seien  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ . Dann existiert für ein  $\varepsilon > 0$  die Geodätische*

$$(26) \quad c_{p,v}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit Anfangswerten} \quad c_{p,v}(0) = p, \quad c'_{p,v}(0) = v.$$

*Je zwei Lösungen zu denselben Anfangswerten stimmen auf dem Schnitt ihres Definitionsbereiches überein (Eindeutigkeit).*

Nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf ist die Lösung unabhängig von der gewählten Karte; daraus folgt die Eindeutigkeit von Geodätischen. Geodätische sind Riemannsche Objekte in folgendem Sinn:

**Lemma 17.** *Ist  $c: I \rightarrow (M, g)$  geodätisch, und  $f: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  lokale Isometrie, so ist auch  $f \circ c: I \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  geodätisch.*

*Beweis.* Für jedes  $t \in I$  gibt es eine Karte  $(x, U)$  um  $c(t)$ . Nach (5) gilt für die lokal definierte Karte  $x \circ f^{-1}$  um  $f(c(t))$  in den jeweiligen Standardbasen  $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$ .

Aus (23) folgt  $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , so dass in einer Umgebung von  $t$  lokal dasselbe Differentialgleichungssystem gilt. Daher stimmen die Lösungen überein.  $\square$

*Beispiele.* Operiert eine diskrete Gruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  durch Isometrien, so ist nach Satz 1 die Projektion  $\pi: M \rightarrow M/G$  lokale Isometrie.

1. Im Falle der flachen Tori  $T^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) / \Gamma$  lösen also die Projektionen von Geraden,  $c_{p,v}(t) = \pi(p + tv)$ , das Anfangswertproblem; sie sind für  $t \in \mathbb{R}$  definiert. Falls  $av \in \Gamma$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so sind die Bildkurven  $c_{p,v}(\mathbb{R})$  kompakt in  $T^n$ , denn  $c_{p,v}(t+a) = \pi(p + (t+a)v) = \pi(p + tv) = c_{p,v}(t)$ . Sie können aber auch dicht  $T^n$  liegen (siehe Übungen).

2. Die Geodätischen von  $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) / \{\pm \text{id}\}$  erhalten wir als Projektionen  $\pi(c_{p,v}(t))$  der Großkreisparametrisierungen (24). Wegen  $c_{p,v}(t + \pi/|v|) = -c_{p,v}(t)$  halbiert sich die Periode gegenüber  $\mathbb{S}^n$ .

Geodätische sind parametrisierte Kurven. Umparametrisierungen mit konstanter Geschwindigkeit bleiben geodätisch:

**Lemma 18.** Sei  $c_{p,v}: I \rightarrow (M, g)$  geodätisch auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

(i) Für  $a > 0$  ist auch  $\tilde{c}(t) := c_{p,v}(at)$  auf  $(-\varepsilon/a, \varepsilon/a)$  geodätisch mit Anfangswerten  $\tilde{c}(0) = p$  und  $\tilde{c}'(0) = av$ .

(ii) Es gilt  $c_{p,v}(at) = c_{p,av}(t)$ .

*Beweis.* (i) Wir lassen den Index  $p, v$  weg. Es gilt  $\tilde{c}'(t) = ac'(at)$ , und daher sind Anfangswerte von  $\tilde{c}$  der Punkt  $p$  und Richtung  $av$ . Weiter ist  $\tilde{c}$  geodätisch, denn

$$\nabla_{\tilde{c}'} \tilde{c}'(t) = \nabla_{ac'} ac'(at) = a^2 \nabla_{c'} c'(at) = 0.$$

(ii) Die beiden Kurven haben dieselben Anfangswerte  $p, av$ . Nach dem Eindeutigkeitsatz stimmen sie daher für alle  $t$  überein.  $\square$

**4.2. Exponentialabbildung.** Eine besonders gute Karte um einen Punkt  $p$  einer Mannigfaltigkeit erhält man, indem man Ursprungsstrahlen auf Geodätische durch  $p$  abbildet:

**Definition.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsch. Die Abbildung

$$\exp_p: E(p) := \{v \in T_p M : c_{p,v}(t) \text{ existiert für } t \in [0, 1]\} \rightarrow M, \quad \exp_p(v) := c_{p,v}(1),$$

heißt *Exponentialabbildung*.

Natürlich ist die Exponentialabbildung  $\exp_p$  allein durch die Lösungen einer Differentialgleichung definiert, so dass wir über  $E(p)$  zunächst nicht viel sagen können. Dennoch wird sich  $\exp$  als nützlich herausstellen.

Unter der Exponentialabbildung gehen die Ursprungsgeraden  $s \mapsto sv \in E(p)$  in  $T_p M$  auf Geodätische, denn  $\exp_p(sv) = c_{p,sv}(1) = c_{p,v}(s)$  (nach Lemma 18(ii) mit  $t := 1, a := s$ ). Nach Definition von  $E(p)$  ist mit  $v \in E(p)$  und  $s \in [0, 1]$  auch  $sv \in E(p)$ . Insbesondere ist der Definitionsbereich  $E(p)$  von  $\exp_p$  sternförmig um 0.

*Beispiele.* 1.  $M = \mathbb{R}^n$ :  $\exp_p(v) = p + v$  und  $E(p) = T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ .

2.  $M = \mathbb{S}^n$ : Es ist  $E(p) = T_p \mathbb{S}^n$  und aus (24) folgt

$$\exp_p(0) = p \quad \text{und} \quad \exp_p(v) = (\cos |v|)p + (\sin |v|) \frac{v}{|v|} \quad \text{für } v \neq 0.$$

Insbesondere bildet  $\exp_p$  folgende Teilmengen von  $T_p M$  auf Punkte ab:  $\{v \in T_p M, \|v\| = \pi\} \mapsto -p$  und  $\{v \in T_p M, \|v\| = 2\pi\} \mapsto p$ , und so weiter. (Analog für  $M = \mathbb{R}P^n$ .)

Für  $M := \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$  ist  $\exp_p$  nur auf einem offenem Ball  $B_\pi(0) \subset T_p \mathbb{S}^n$  definiert.

3. Für  $M = \mathbf{SO}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  kann man folgendes zeigen. Dies ist eine Mannigfaltigkeit, deren Tangentialraum an die Einheitsmatrix  $E \in \mathbf{SO}(n)$  durch den Raum der schiefen Matrizen

gegeben ist; insbesondere hat  $M$  die Dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Ist  $V \in T_E M$  eine schiefe Matrix, so wird eine Geodätische durch  $E$  durch die Kurve  $c_{E,V}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tV)^k$  dargestellt. Die Reihe  $\exp_E(V) = E + V + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{3!}V^3 + \dots$  hat den Namen Exponentialabbildung geprägt.

Wir zeigen nun, dass  $E(p)$  immer eine Umgebung der 0 enthält.

**Satz 19.** (i) Sei  $p \in M$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $V = V(p)$  der 0 in  $T_p M$ , so dass  $\exp_p$  für alle  $v \in V$  definiert ist.

(ii) Für jede Menge  $A \subset M$  gibt es eine offene Umgebung von  $W := A \times \{0\} \subset TM$ , auf der  $\exp$  definiert ist.

(iii)  $\exp_p: E(p) \rightarrow M$  ist differenzierbar.

*Beweis.* Wir betrachten  $\exp$  als eine Abbildung

$$\exp: E := \{(p, v) \in TM : c_{p,v}(s) \text{ existiert für } s \in [0, 1]\} \rightarrow M.$$

Sei  $(p, v) \in E$ . Weil Geodätische auf offenen Intervallen existieren, ist für ein  $\varepsilon > 0$  sogar noch  $c_{p,v}(1 + \varepsilon)$  definiert. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung der Geodätischen-Gleichung von den Anfangswerten gilt dies sogar noch in einer kleinen Umgebung von  $(p, v) \in TM$ . Also ist  $E$  eine offene Teilmenge von  $TM$ .

Weil  $(p, 0)$  in  $E$  liegt, folgt daraus (i). Weil der Nullschnitt  $\{(p, 0) \in TM : p \in M\}$  in  $E$  enthalten ist, liegt sogar eine Umgebung von  $A \times \{0\}$  ebenfalls in  $E$  und (ii) folgt.

Die Aussage (iii) folgt daraus, dass die Lösungen  $c_{p,v}(1)$  der Geodätischen-Gleichung differenzierbar von den Anfangswerten (26) abhängen.  $\square$

Wir halten nun wieder  $p$  fest.

**Satz 20.**  $\exp_p(0) = p$  und  $d(\exp_p)_0 = \text{id}$ .

Wegen  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  geht eigentlich

$$d(\exp_p)_v: T_v T_p M \rightarrow T_{\exp_p(v)} M.$$

Jedoch ist  $T_p M$  ein Vektorraum, und für Vektorräume hat man eine kanonische Parallelverschiebung: Man kann den Fußpunkt vergessen, so wie man das immer bei der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}^n$  tut. Durch diese Identifikation wird der Definitionsbereich zu  $T_v T_p M = T_p M$ . Weiter ist  $\exp_p(0) = p$  und daher ist das Bild ebenfalls  $T_{\exp_p(0)} M = T_p M$ . Diese Identifikation haben wir bei der Formulierung des Lemmas bereits unterstellt, um  $\text{id}$  schreiben zu können.

Geometrisch verstehen wir  $d(\exp_p)_v \cdot w \in T_{\exp_p(v)} M$  als Änderungsrichtung von  $\exp_p(v) = c_{p,v}(1)$ , wenn man  $v \in T_p M$  in Richtung  $w \in T_v T_p M$  ändert.

*Beispiel.*  $\mathbb{S}^n$ . Es sei  $S_\pi := \{v \in T_p M, \|v\| = \pi\}$ . Weil sämtliche Geodätische der Länge  $\pi$  ihren Endpunkt im Antipodenpunkt haben, gilt  $\exp_p|_{S_\pi} \equiv -p$ . Ist also  $v \in S_\pi$  und  $w \in T_v T_p M$  ein Vektor, der tangential an  $S_\pi$  ist, so haben wir verschwindende Ableitung  $(d\exp_p|_v)w = 0$ . Andererseits verlängern sich die Geodätischen  $c_{p,v}(1)$ , wenn man  $v$  in radialer Richtung ändert, d.h. auf Ableitungsniveau gilt  $(d\exp_p)_v \cdot \frac{v}{\|v\|} = c'_{p,v/\|v\|}(\pi)$ .

*Beweis.* Für  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow N$  ist laut Kettenregel  $\frac{d}{dt}\varphi(x + tv)|_{t=0} = d\varphi_x \cdot v$ . Entsprechend ist

$$d(\exp_p)_0 \cdot v = \frac{d}{dt} \exp_p(0 + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} c_{p,tv}(1)|_{t=0} \stackrel{\text{Lemma 18(ii)}}{=} \frac{d}{dt} c_{p,v}(t)|_{t=0} = v. \quad \square$$

#### 14. Vorlesung, Mittwoch 25.11.09

---

**Korollar 21.** Für jedes  $p \in M$  besitzt der Tangentialvektor  $0 \in T_p M$  eine Umgebung  $V(p)$ , so dass  $\exp_p: V(p) \rightarrow M$  Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

*Beweis.* Satz 20 und Umkehrsatz. □

Auf wie großen Mengen  $V(p)$  ist  $\exp_p$  Diffeomorphismus? Wenn  $M$  eine geschlossene Geodätische  $c$  der Länge  $\ell$  hat, so ist offenbar höchstens  $\ell/2$  der maximale Radius eines Balles um einen Punkt  $p$  der, auf dem  $\exp_p$  noch Diffeomorphismus ist. Z.B. für Mannigfaltigkeiten mit dünnen Henkeln erwarten wir in den Henkeln, dass dieser Radius klein ist.

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{R}_k^n: V(p) = \mathbb{R}^n$

2.  $\mathbb{S}^n: V(p) = B_\pi$ , denn:  $|v| = \pi \implies \exp_p v = -p$ , unabhängig von der Richtung von  $v$ .

3.  $\mathbb{R}P^n: V(p) = B_{\pi/2}$ , denn für  $|v| = \pi/2$  gilt  $[\exp_p v] = [-\exp_p(-v)]$ .

4. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Rotationsfläche, die ihre Achse trifft, so dass wir sie als Immersion von  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  verstehen können. Betrachten wir dann die beiden Punkte  $p, q$  auf der Achse. Zeigen Sie mit einem Symmetrieargument, dass Geodätische dann Meridiankurven sind und  $\exp_p$  einen Diffeomorphismus von einer passenden Kreisscheibe auf  $M \setminus \{q\}$  darstellt.

Als eine Folgerung aus dem Korollar gewinnen wir nun spezielle Koordinaten. Sie sind gut an die Geometrie angepasst und daher für viele Zwecke tatsächlich am besten. Auch wenn ich leider in dieser Vorlesung Ihnen kein Beispiel dafür gebe, rechnet man viele differentialgeometrische Behauptungen recht einfach in diesen speziellen Koordinaten nach und überzeugt sich dann, dass das Ergebnis auch allgemein gilt.

**Satz 22.** Sei  $p \in (M, g)$ . Dann gibt es Koordinaten auf  $T_p M$ , und eine Umgebung  $U$  von  $p$  so dass  $x := \exp_p^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  Karte ist mit  $g_{ij}(p) = \pm \delta_{ij}$  (dabei tritt das negative Vorzeichen ind  $g$ -mal auf) und  $\Gamma_{ij}^\ell(p) = 0$  für alle  $i, j, \ell$ . Man nennt  $x$  Normalkoordinaten um  $p$ .

Diese Aussagen gelten allein im Punkt  $p$ . In der elementaren Differentialgeometrie haben wir übrigens die gleiche Aussage schon für die lokale Normalform einer Fläche gezeigt.

*Beweis.* 25.11.: diesen Beweis muss ich noch korrigieren:

Auf dem Vektorraum  $T_pM$  stellt  $g$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Index  $k$  dar. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation gibt es daher eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ , so dass  $g(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$ , wobei genau  $k$  der  $n$  Paare  $i = j$  ein Minuszeichen erhalten. Wir wählen nun  $U$  entsprechend dem letzten Korollar. Dies zeigt die erste Behauptung

Wir schreiben nun einen Vektor  $v \in T_pM$  als  $v = \sum_i \xi^i e_i$ . Die Ursprungsgeraden  $t \mapsto tv$  haben Kurven  $c(t) := \exp_p(tv)$  als Bilder, deren Hauptteil  $v$  konstant in  $t$  ist, also  $(\gamma')^i(t) \equiv \xi^i$ . Weil  $c$  geodätisch ist, ergibt die Geodätischen-Gleichung (25)

$$(27) \quad 0 = \xi'^\ell + \sum_{i,j} \xi^i \xi^j \Gamma_{ij}^\ell \circ c, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Wir erhalten für  $t = 0$  daraus  $0 = \sum_{i,j} \xi^i \xi^j \Gamma_{ij}^\ell(p)$  für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Aber das bedeutet, dass die quadratische Form  $\xi \mapsto \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^\ell(p) \xi^i \xi^j$  verschwindet, also  $\Gamma_{ij}^\ell(p) = 0$ .  $\square$

**4.3. Erste Variation der Bogenlänge.** Eine Hauptfrage der Riemannschen Geometrie ist, wann Geodätische Kürzeste sind. Um diese Frage präzise formulieren zu können, wollen wir zunächst untersuchen, wie sich die Bogenlänge ändert, wenn wir die Kurve variieren, d.h. zu nah benachbarten Kurven übergehen.

**Definition.** Sei  $c: I = [a, b] \rightarrow M$  differenzierbare Kurve.

(i) Eine differenzierbare Abbildung  $h: (-\delta, \delta) \times I \rightarrow M$ ,  $(s, t) \mapsto h(s, t)$  oder  $h_s(t)$  mit  $h_0(t) = c(t)$  heißt *Variation* von  $c$ .

(ii) Das Vektorfeld  $V(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t)|_{s=0}$  längs  $c$  heißt *Variations-Vektorfeld* von  $h$ .

(iii)  $h$  heißt *eigentlich* wenn  $h_s(a) = c(a)$ ,  $h_s(b) = c(b)$  für alle  $s$ .

(iv)  $\delta_V L(c) := \frac{d}{ds}(L(h_s))|_{s=0}$  heißt *erste Variation der Bogenlänge* in Richtung  $V$ .

Zur Berechnung der ersten Variation brauchen wir eine Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz:

**Lemma 23.** Ist  $h: (-\delta, \delta) \times I \rightarrow M$  differenzierbar, so gilt

$$(28) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} h = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} h.$$

Dabei haben wir auf der linken Seite  $\frac{\partial}{\partial s} h$  als Vektorfeld längs der Kurve  $t \mapsto h_s(t)$  aufgefasst für jedes  $s$ , und rechts  $\frac{\partial}{\partial t} h$  als Vektorfeld längs  $s \mapsto h_s(t)$  für jedes  $t$ .

*Beweis.* Wir fassen  $X = \frac{\partial h}{\partial s}$  als Vektorfeld längs der Kurven  $t \mapsto h_s(t)$  mit Tangentialvektor  $\frac{\partial h}{\partial t}$  auf.



An jeder Stelle  $(s, t)$  können wir unter Verwendung der lokalen Formel (19) für  $\frac{D}{dt}$  schreiben:

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h^k}{\partial s} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \circ h \frac{\partial h^i}{\partial s} \frac{\partial h^j}{\partial t} \right) e_k \circ h$$

Auf den ersten Term wenden wir nun das Schwarzsche Lemma an, auf den zweiten die Konsequenz der Torsionsfreiheit  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  aus (20). Damit erhalten wir:

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial h^k}{\partial t} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \circ h \frac{\partial h^i}{\partial t} \frac{\partial h^j}{\partial s} \right) e_k \circ h = \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder (19) für die kovariante Ableitung von  $\frac{\partial h}{\partial t}$  längs der Kurven  $s \mapsto h_s(t)$  verwendet.  $\square$

**Lemma 24** (1. Variation). *Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  differenzierbar mit konstanter Geschwindigkeit  $k := \|c'\| > 0$ , und sei  $\varepsilon := \text{sign } g(c', c') \in \{\pm 1\}$ . Ist nun  $h_s$  eine Variation mit Vektorfeld  $V$  längs  $c$ , so gilt*

$$(29) \quad \delta_V L(c) = \frac{\varepsilon}{k} g(V, c') \Big|_a^b - \frac{\varepsilon}{k} \int_a^b g\left(V(t), \frac{D}{dt} c'\right) dt.$$

Wir erläutern die beiden Terme dieser Formel. Der zweite ist für unsere Zwecke der Hauptterm:

- Verändert man die Kurve in Richtung ihres Krümmungsvektors,  $V(t) = \frac{D}{dt} c'$ , so wird sie kürzer. Verändert man andererseits nur die Parametrisierung, so ist  $V \parallel c'$ , also  $V \perp \frac{D}{dt} c'$  und damit ändert sich die Länge nicht.
- Der Term verschwindet, wenn die Kurve geodätisch ist  $\frac{D}{dt} c' \equiv 0$ .

Der erste Term ist ein Randterm:

- Er gibt den Verkürzungs- oder Verlängerungseffekt an, der sich einstellt, wenn man die Endpunkte von  $c$  verändert: Verlängert man z.B. die Kurve,  $V(b) = c'(b)$ , so wächst die Bogenlänge. Verschiebt man den Endpunkt  $c(b)$  in einer Richtung  $V(b)$  senkrecht zur Tangente  $c'(b)$ , so gibt es in diesem Term keine Änderung der Länge.
- Der Term verschwindet, wenn die Variation eigentlich ist.

Veranschaulichen Sie sich diese Effekte z.B. für den ersten Term an Strecken in  $\mathbb{R}^2$ . Für den zweiten Term sehen Sie sich die Bogenlänge eines Graphen in  $\mathbb{R}^2$  an; ein Riemannsches Beispiel wären verkürzende (eigentliche) Variationen der Strecke  $c(t) := (t, 1)$ ,  $t \in [0, 1]$  im oberen Halbebenen-Modell von  $\mathbb{H}^2$ .

*Bemerkung.* Da die rechte Seite von (29) allein von  $V$ , aber sonst nicht von  $h_s$  abhängt, ist die Bezeichnung  $\delta_V L(c)$  gerechtfertigt.

*Beweis.* Es ist

$$L(h_s) = \int \|h'_s\| dt = \int \sqrt{|g(h'_s, h'_s)|} dt$$

mit  $\|h'_0(t)\| > 0$  für alle  $t$ . Weil  $(s, t) \mapsto \|h'_s(t)\|$  stetig ist, und  $[a, b]$  kompakt, können wir nach Verkleinerung von  $\delta$  annehmen, dass  $\|h'_s(t)\| > 0$  für  $|s| < \delta$  und  $t \in [a, b]$ . Dann ist  $|g(h'_s, h'_s)| = \varepsilon g(h'_s, h'_s)$  unabhängig von  $s, t$  und daher ist der Integrand differenzierbar. Wir berechnen nun die erste Variation, indem wir unterm Integral differenzieren und dabei benutzen, dass der Levi-Civita-Zusammenhang Riemannsch ist:

$$\begin{aligned} \delta_V L(c) &= \frac{d}{ds} L(h_s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{\varepsilon g\left(\frac{\partial}{\partial t} h_s(t), \frac{\partial}{\partial t} h_s(t)\right)} dt \Big|_{s=0} \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon g(\cdot, \cdot)|_{s=0}}} 2\varepsilon g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} h_s(t) \Big|_{s=0}, \frac{\partial}{\partial t} h_s(t) \Big|_{s=0}\right) dt \\ &\stackrel{(28)}{=} \frac{\varepsilon}{k} \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \Big|_{s=0}, c'(t)\right) dt = \frac{\varepsilon}{k} \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} V(t), c'(t)\right) dt \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch partielle Integration:

$$\delta_V L(c) = \frac{\varepsilon}{k} \int_a^b \frac{d}{dt} g(V(t), c'(t)) - g\left(V(t), \frac{D}{dt} c'(t)\right) dt \quad \square$$

Wir zeigen nun einen wichtigen Satz für Geodätische. Die geodätische Krümmung verschwindet genau dann, wenn die Kurve die Variationseigenschaft hat, kritisch für die Bogenlänge zu sein:

**Satz 25.** *Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine nirgends lichtartige Kurve, also  $\|c'\| > 0$ . Dann ist  $c$  geodätisch ( $\frac{D}{dt} c' = 0$ ) genau dann, wenn  $\|c'\|$  konstant ist und  $\delta_V L(c) = 0$  für jede eigentliche Variation  $h_s$  von  $c$  mit Vektorfeld  $V$ .*

*Beweis.* “ $\implies$ ” Aus  $\frac{D}{dt} c' = 0$  folgt  $k := \|c'\| > 0$  konstant nach Satz 15. Weil  $h_s$  eigentlich ist, gilt nach der ersten Variationsformel (29) deshalb  $\delta_V L(c) = 0$ .

“ $\impliedby$ ” Wir zeigen das Verschwinden der geodätischen Krümmung  $\frac{D}{dt} c'(t_0) = 0$  nur für  $t_0 \in (a, b)$ . Wegen der Stetigkeit von  $\frac{D}{dt} c'$  ergibt dies die Behauptung.

Für  $\xi > 0$  klein gibt es eine Hutfunktion  $f = f_\xi \in C_c^\infty([a, b])$ , so dass der Träger in  $[t_0 - \xi, t_0 + \xi] \subset (a, b)$  liegt,  $0 \leq f \leq 1$  und  $f(t_0) = 1$ . Sei weiterhin  $y$  ein beliebiger Tangentialvektor an  $M$  in  $c(t_0)$ . Wir erweitern  $y$  zu einem Vektorfeld  $Y$  längs  $c$ , beispielsweise durch Parallelverschiebung. Setzen wir  $V := fY$ , so ist die Variation

$$h_s(t) := \exp_{c(t)}(sV(t))$$

wegen  $f(a) = f(b) = 0$  eigentlich. Sie hat  $V$  als Variationsvektorfeld, denn

$$\frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_{c(t)}(sV(t)) \Big|_{s=0} = (d \exp_{c(t)})_0 V(t) \stackrel{\text{Satz 20}}{=} V(t).$$

Wir betrachten nun die Menge  $K := c([a, b]) \subset M$ . Nach Satz 19 ist  $\exp$  auf einer Umgebung der Menge  $K \times \{0\} \subset TM$  definiert. Weiterhin ist  $h_s([a, b])$  eine kompakte Menge,

die stetig von  $s$  abhängt. Ein Kompaktheitsargument zeigt daher die Existenz eines  $\delta > 0$ , so dass für  $|s| < \delta$  auch die Variationskurven  $h_s([a, b])$  in dieser Umgebung enthalten sind.

Weil  $h_s$  eigentlich ist, folgt

$$0 = \delta_V L(c) \stackrel{(29)}{=} -\frac{\varepsilon}{k} \int_a^b g\left(V(t), \frac{D}{dt}c'\right) dt = -\frac{\varepsilon}{k} \int_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} f_\xi(t) g\left(Y(t), \frac{D}{dt}c'(t)\right) dt$$

für alle  $\xi > 0$  klein und jedes  $Y$ . Weil der Integrand stetig in  $t$  ist, muss sogar

$$g\left(Y, \frac{D}{dt}c'(t_0)\right) = 0 \quad \text{für alle } Y \in T_{c(t_0)}M$$

gelten. Die semi-Riemannsche Metrik  $g$  ist aber nicht ausgeartet, woraus wie gewünscht  $\frac{D}{dt}c'(t_0) = 0$  folgt.  $\square$

*Bemerkungen.* 1. Wir hatten dieselbe Aussage für den Fall einer Untermannigfaltigkeit in der elementaren Differentialgeometrie schon bewiesen (III, Satz 3). Der hier gegebene Beweis für den semi-Riemannschen Fall ist etwas aufwendiger. Auf der anderen Seite ist die Verwendung von  $\exp$  eleganter.

2. Eine interessante Frage ist, wann der kritischer Punkt  $c = h_0$  auch ein Minimum von  $s \mapsto L(h_s)$  ist, d.h. wann  $c$  die Länge zwischen den Endpunkten lokal minimiert. Ganz analog zum Fall kritischer Punkte von Funktionen, für den die zweite Ableitung (bzw. Hesseform) eine hinreichende Antwort auf diese Frage gibt, ist für Kurven Positivität einer zweiten Variation hinreichend für Minimalität.

3. Die Bogenlänge merkt nicht, welche Parametrisierung verwendet wird. Daher mußten wir zusätzlich zu  $\delta_V L(c) = 0$  auch noch  $\|c'\|$  konstant voraussetzen. Die *Energie*  $E(c) := \frac{1}{2} \int \|c'\|^2 dt$  ist besser: Man rechnet nach (Übung)

$$\delta_V E(c) = g(V, c')\Big|_a^b - \int_a^b g\left(V(t), \frac{D}{dt}c'\right) dt,$$

so dass kritische Punkte von  $E$  mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Geodätische sind:

$$\delta_V E(c) = 0 \text{ für alle } V \text{ mit } V(a) = V(b) = 0 \iff c \text{ Geodätische} \implies \|c'\| \text{ konstant}$$

Ein physikalisches Modell zur Energie sind Gleichgewichtspositionen eines Gummibandes. Für ein Gummiband ist  $\|c'\|$  eine Spannung; in Gleichgewichtslagen ist diese Spannung gleich groß in jedem Punkt.

15. Vorlesung, Dienstag 1.12.09 \_\_\_\_\_

**4.4. Stückweise differenzierbare Kurven.** Stückweise differenzierbare Kurven betrachtet man, da erst diese Klasse von Kurven abgeschlossen bezüglich Hintereinanderhängen ist – Sie kennen das aus der Funktionentheorie. Wir werden in dieser größeren Klasse allerdings keine zusätzlichen kritischen Punkte der Bogenlänge finden; das überrascht nicht, denn Kurven werden nicht dadurch kürzer, dass man Ecken in sie einbaut.

**Definition.** (i) Eine *stückweise differenzierbare* Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  ist eine stetige Kurve, für die es eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$  von  $[a, b]$  gibt, so dass  $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$  differenzierbar ist für  $i = 1, \dots, \ell$ .

(ii) Eine *gebrochene Variation* der stückweise differenzierbaren Kurve  $c$  ist eine stetige Abbildung  $h: (-\delta, \delta) \times [a, b] \rightarrow M$ , so dass jede Einschränkung  $h: (-\delta, \delta) \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$  eine differenzierbare Variation von  $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$  ist.

Für  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_{\ell-1}\}$  können wir die gebrochene Variation nach  $s$  ableiten und erhalten dadurch ein *stückweise differenzierbares Vektorfeld*  $V(t) := \frac{\partial h_s}{\partial s}(t)|_{s=0}$  längs  $c$  als Variationsfeld.

Erklärt man schließlich die Bogenlänge durch  $L(c) := \sum_{i=1}^{\ell} L(c|_{[t_{i-1}, t_i]})$ , so kann man durch Anwenden von (29) auf jedes Teilintervall  $[t_{i-1}, t_i]$  erhalten:

**Satz 26.** Sei  $c$  stückweise differenzierbar mit  $k := \|c'\| \neq 0$  konstant und  $\varepsilon = \text{sign } g(c', c')$ . Dann gilt für jede gebrochene Variation  $h_s(t)$  mit Variationsfeld  $V$

$$(30) \quad \delta_V L(c) = \frac{\varepsilon}{k} \sum_{i=1}^{\ell} g(V, c') \Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} - \frac{\varepsilon}{k} \int_a^b g\left(V(t), \frac{D}{dt} c'\right) dt.$$

Dabei ist  $c'(t_i^+) := \lim_{t \searrow t_i} c'(t)$ ; entsprechend für minus.

Wenn die erste Version von stückweise differenzierbaren Kurven verschwindet, so sind solche Kurve wiederum Geodätische, d.h. sie besitzen keine Ecken:

**Satz 27.** Sei  $c$  stückweise differenzierbar und  $\|c'\| \neq 0$  konstant auf  $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_{\ell-1}\}$ . Dann ist  $c$  eine differenzierbare Geodätische (also  $\frac{D}{dt} c' = 0$  auf  $[a, b]$ ) genau dann, wenn  $\delta_V L(c) = 0$  für jede eigentliche gebrochene Variation  $h_s$  von  $c$  mit Variationsfeld  $V$ .

*Beweis.* “ $\implies$ ” Ist  $c$  differenzierbar, so folgt  $c'(t_i^-) = c'(t_i^+)$ . Daher wird der erste Term von (30) zu einer Teleskopsumme, die verschwindet; der zweite verschwindet ohnehin.

“ $\impliedby$ ” Das Argument aus dem Beweis von Satz 25 zeigt, dass auf jedem glatten Teilstück  $t \in (t_{i-1}, t_i)$  von  $c$  die geodätische Krümmung  $\frac{D}{dt} c'(t)$  verschwindet. Ist  $y$  ein beliebiger Tangentialvektor an einen singulären Punkt  $c(t_i)$ , so können wir  $y$  zu einem Vektorfeld  $Y$  längs  $c$  fortsetzen.

Sei  $f \geq 0$  eine Hutfunktion mit  $f(t_i) = 1$  und Träger in  $(t_{i-1}, t_{i+1})$ . Für das Feld  $V := fY$  ergibt  $h_s(t) := \exp_{c(t)}(sV(t))$  eine eigentliche Variation. Die erste Variation (30) dafür lautet

$$0 = \delta_V L(c) = \frac{\varepsilon}{k} \left( g(y, c'(t_i^-)) - g(y, c'(t_i^+)) \right) = \frac{\varepsilon}{k} g(y, c'(t_i^-) - c'(t_i^+))$$

für alle  $y$ . Es folgt  $c'(t_i^-) = c'(t_i^+)$ . Dies zeigt, dass  $c$  einmal differenzierbar ist.

Aber jede  $C^1$ -Lösung  $c$  der Differentialgleichung  $\frac{D}{dt}c' = 0$  ist tatsächlich sogar  $C^\infty$ : In  $\gamma''^k = \sum_{ij} -(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)\gamma'^i\gamma'^j$  ist die rechte Seite stetig in  $t$ , also existieren die Grenzwerte  $\gamma''(t_i)$ . Durch erneutes Differenzieren nach  $t$  erhalten wir  $\gamma'''^k(t_i)$  als stetigen Grenzwert, usw.  $\square$

#### 4.5. Kürzeste.

**Definition.** Eine stückweise differenzierbare Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  heißt *Kürzeste*, wenn  $L(c) \leq L(\tilde{c})$  für jede stückweise differenzierbare Kurve  $\tilde{c}: I \rightarrow M$  zwischen  $c(a)$  und  $c(b)$  ist.

*Beispiele.* 1. Auf  $\mathbb{S}^n$  sind Großkreisbögen bis zur Länge  $\pi$  Kürzeste.

2. In  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$  gibt es keine Kürzeste zwischen  $\pm 2e_1$ .

3. Jede lichtartige Kurve ist Kürzeste.

**Satz 28.** *Jede stückweise differenzierbare Kürzeste  $c$ , die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist mit  $\|c'\| \neq 0$ , ist geodätisch. Insbesondere ist  $c$  differenzierbar.*

*Beweis.* Es gilt  $L(c) \leq L(h_s(t))$  für jede eigentliche Variation  $h_s$  von  $c$ . Also hat  $s \mapsto L(h_s(t))$  ein Minimum in  $s = 0$ , das heißt  $\delta_V L(c) = 0$ . Aus Satz 27 folgt die Behauptung.  $\square$

*Beispiel.* Sei  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  der quadratische Torus und  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ ,  $\pi(p) = [p]$ , die Projektion.

Wie sieht die Menge aller Geodätischen zwischen zwei Punkten  $p = \pi(P)$  und  $q = \pi(Q)$  aus? Wir wissen, dass alle Geodätischen in  $T^2$  Projektionen von Geraden des  $\mathbb{R}^2$  sind. Seien  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  und  $Q_{m,n} := Q + (m, n)$ . Dann projiziert jedes Geradenstück  $G_{m,n}$  in  $\mathbb{R}^2$  von  $P$  nach  $Q_{m,n}$  auf eine Geodätische  $c_{m,n}$  von  $p = \pi(P)$  nach  $q = \pi(Q)$ . Tatsächlich sind dies alle Geodätischen von  $p$  nach  $q$ , d.h. man findet in jeder Homotopieklasse  $\sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  von Kurven von  $p$  nach  $q$  genau eine Geodätische (warum?).

Von diesen Geodätischen ist normalerweise eine die Kürzeste, Es können aber maximal vier Kürzeste existieren, z.B. für  $Q = P + (1/2, 1/2)$ .

**4.6. Gauß-Lemma.** Wir betrachten nun  $d \exp$  an einer beliebigen Stelle. Weil  $\exp_p(tv) = c_{p,v}(t)$  geodätischer Strahl ist, ist

$$(31) \quad \|d(\exp_p)_v \cdot v\| = \left\| \frac{d}{dt} \exp_p tv \Big|_{t=1} \right\| = \left\| \frac{d}{dt} c_{p,v}(t) \Big|_{t=1} \right\| \stackrel{\text{Geod. haben konst. Geschw.}}{=} \|v\|.$$

Andererseits scheint es, dass man für einen Vektor  $w \perp v$  nicht viel sagen kann:  $d(\exp_p)_v w$  kann verschwinden (z.B. auf der Sphäre für  $\|v\| = \pi$ ), oder aber auch groß sein (beispielsweise im Hyperbolischen). Dennoch hat man noch eine Aussage:

**Lemma 29** (Gauß-Lemma). *Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsch. Weiter seien  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ , so dass  $\exp_p(v)$  definiert ist, und  $w \in T_p M$ . Dann gilt*

$$g(d(\exp_p)_v \cdot v, d(\exp_p)_v \cdot w) = g(v, w).$$

Auch in dieser Aussage haben wir den Vektorraum  $T_p M$  mit  $T_v T_p M$  durch Parallelverschiebung identifiziert. Man kann die Aussage folgendermaßen verstehen: In radialer Richtung ist  $\exp$  isometrisch (wähle für  $w$  ein skalares Vielfaches von  $v$ ). Eine dazu orthogonale Richtung (wähle  $w$  mit  $g(v, w) = 0$ ) hat unter  $\exp$  immerhin auch ein dazu orthogonales Bild.

*Beweis.* Wir betrachten die Geraden  $t \mapsto t(v + sw)$  in  $T_p M$  und ihr Bild unter der Exponentialabbildung,

$$h(s, t) := \exp_p t(v + sw) = c_{p, v+sw}(t), \quad t \in [0, 1], \quad -\delta < s < \delta.$$

Wegen der Offenheit des Definitionsbereichs der Exponentialabbildung existiert ein  $\delta > 0$  für das die Abbildung erklärt ist.

Die Variationsvektoren in den Endpunkten lauten

$$\frac{\partial h}{\partial s}(0, 1) = \frac{d}{ds} \exp_p(v + sw) \Big|_{s=0} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d(\exp_p)_v w, \quad \frac{\partial h}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds} \exp_p 0 \Big|_{s=0} = 0.$$

Weiter ist die Endpunktstangente der Kurve mit  $s = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0, 1) = \frac{d}{dt} \exp_p t(v + 0w) \Big|_{t=1} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d(\exp_p)_v v.$$

Es folgt

$$(32) \quad g(d(\exp_p)_v \cdot v, d(\exp_p)_v \cdot w) = g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(0, 1), \frac{\partial h}{\partial s}(0, 1)\right) \\ \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(0, 0), \underbrace{\frac{\partial h}{\partial s}(0, 0)}_{=0}\right) + \int_0^1 \frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(0, t), \frac{\partial h}{\partial s}(0, t)\right) dt$$

Wir rechnen nun den Integranden aus. Für jedes  $s$  ist die radiale Kurve  $t \mapsto h(s, t)$  geodätisch, also  $\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = 0$ . Daher gilt für alle  $s, t$

$$(33) \quad \frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) = g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}\right) \stackrel{(28)}{=} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right).$$

Hierbei haben wir die Torsionsfreiheit von  $\nabla$  und die Verträglichkeit mit der Metrik benutzt.

Um weiter die rechte Seite zu berechnen, betrachten wir die Kurve  $t \mapsto h(s, t)$ . Sie hat Anfangsgeschwindigkeit  $\frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) = v + sw$ . Weil sie geodätisch ist, hat ihr Tangentialvektor

für alle  $t$  dieselbe Länge (Satz 15). Deshalb gilt für alle  $s, t$ :

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\right) = g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s, 0), \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)\right) = g(v + sw, v + sw)$$

Spezialisieren wir nun auf  $s = 0$  und setzen dieses Resultat in (33) ein, so ergibt sich

$$(34) \quad \frac{d}{dt}g\left(\frac{\partial h}{\partial t}(0, t), \frac{\partial h}{\partial s}(0, t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}g(v + sw, v + sw)\Big|_{s=0} = g(v, w) \quad \text{für alle } t.$$

In (32) ersetzen wir nun den Integranden durch diesen in  $t$  konstanten Wert. Daraus erhalten wir die gewünschte Behauptung.  $\square$

#### 4.7. Übungsaufgaben.

##### Aufgabe 24 – QUIZ ZU GEODÄTISCHEN:

- Eine konstante Kurve  $c(t) \equiv p$  ist Geodätische.
- Multipliziert man die Metrik  $g$  mit einer Konstanten  $\lambda > 0$ , so bleiben gleich: Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla_X Y$  ja/nein,  $[X, Y]$  ja/nein, Parallelverschiebung ja/nein, Geodätische ja/nein.
- Die Differentialgleichung für Parallelverschiebung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.
- Die Differentialgleichung für Geodätische ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.
- Sei  $c: I \rightarrow M$  eine nicht-konstante Geodätische. Wie muss ein Diffeomorphismus von Intervallen  $h: J \rightarrow I$  aussehen, damit  $c \circ h$  wieder geodätisch ist?

##### Aufgabe 25 – CHRISTOFFELSYMBOLE DER HYPERBOLISCHEN EBENE:

Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell von  $\mathbb{H}^2$ .

- Berechnen Sie die Christoffel-Symbole.
- Bestimmen Sie die Geodätischen.  
*Hinweis:* Das Ergebnis sollen Strahlen senkrecht zur  $x$ -Achse sein, sowie Halbkreise mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse.
- Zwei Geodätische heißen *parallel*, falls sie keine gemeinsamen Punkte besitzen.  
Zeigen Sie, dass es zu jeder Geodätischen  $\gamma$  in  $\mathbb{H}^2$  und jedem nicht auf  $\gamma$  liegenden Punkt  $p \in \mathbb{H}^2$  unendlich viele zu  $\gamma$  parallele Geodätische durch  $p$  gibt.  
*Bemerkung:* Die hyperbolische Halbebene bildet also eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom verletzt ist.

##### Aufgabe 26 – QUIZ ZUR EXPONENTIALABBILDUNG:

In  $\mathbb{R}^n$  gilt  $\exp_p(v) = \dots\dots\dots$ . Also ist  $d(\exp_p)_v(w) = \dots\dots\dots$

Betrachten wir nun die Sphäre  $\mathbb{S}^2$ . Sei  $p \in \mathbb{S}^2$ .

a) Es sei  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  mit  $|v| = \pi/2$ . Bestimmen Sie geometrisch und als Formel:

$$\bullet \exp_p v \quad \bullet d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|} \quad \bullet d(\exp_p)_v w \text{ für } w \perp v \text{ ein Einheitsvektor.}$$

b) Es sei  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  mit  $|v| = \pi$ . Bestimmen Sie wiederum:

$$\bullet \exp_p v \quad \bullet d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|} \quad \bullet d(\exp_p)_v w \text{ für } w \perp v \text{ ein Einheitsvektor.}$$

c) Gibt es ein  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  so dass  $(d\exp_p)_v v = 0$ ?

### Aufgabe 27 – GEODÄTISCHE AUF DEM ZYLINDER:

Es sei  $Z$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^3$ , z.B.  $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ .

a) Zeigen Sie, dass es für je zwei Punkte  $p \neq q$  auf  $Z$  unendlich viele Geodätische von  $p$  nach  $q$  in  $Z$  gibt.

b) Gilt das auch für  $p = q$ ?

### Aufgabe 28 – GEODÄTISCHE UNTER ISOMETRIEN:

Gibt es auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Metrik, bezüglich welcher alle Ursprungskreise Geodätische sind?

### Aufgabe 29 – ERSTE VARIATION DER ENERGIE:

Es sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Weiter sei  $h_s$  eine eigentliche Variation von  $c$  mit Vektorfeld  $V$ .

a) Berechnen Sie die erste Variation  $\delta_V E(c)$  des Energiefunktionals  $E(c) := \frac{1}{2} \int_a^b \|c'\|^2 dt$ .

b) Zeigen Sie, dass genau dann  $\delta_V E(c) = 0$  für alle eigentlichen Variationen mit Vektorfeld  $V$  gilt, wenn  $c$  eine Geodätische ist.

### Aufgabe 30 – GEODÄTISCHE IN $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ :

Wir definieren  $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ , dabei sei  $A^0 := \mathbf{1}$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\exp(A)$  für jedes  $A \in M_n(\mathbb{R})$  konvergiert, so dass  $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ .

b) Wir definieren durch  $c(t) := \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k$  eine Kurve  $c: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $c'$ ,  $c''$  und zeigen Sie mit der Differentialgleichung von  $c$  die Identität  $c(s+t) = c(s)c(t)$ .

c) Wir bezeichnen den Vektorraum der schiefsymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen mit  $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ , und den der symmetrischen mit  $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass man bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die orthogonale Zerlegung  $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$  hat.

d) Für  $A \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$  folgern Sie nun mit b) und c) die folgenden Behauptungen.

i, Die Kurve  $c(t)$  liegt in der Drehgruppe,  $\exp(tA) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ .

ii,  $\|c'(t)\|$  ist konstant bezüglich der Metrik  $\langle A, B \rangle = \mathrm{trace}(AB^T)$ .

iii,  $c$  ist Geodätische in  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ .

### Aufgabe 31 – VERKÜRZUNG EINER ECKE:



Betrachten Sie die Kurve mit Ecke  $c: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) := (t, 0)$  für  $t \leq 0$  und  $c(t) := (0, t)$  für  $t \geq 0$ . Geben Sie eine konkrete Variation  $h_s$  an, die  $c$  verkürzt.

**Aufgabe 32** – VERKÜRZUNG EINER KURVE IN DER HYPERBOLISCHEN EBENE:

Betrachten Sie die Strecke  $c(t) := (t, 1)$ ,  $t \in [0, 1]$  im oberen Halbebenen-Modell von  $\mathbb{H}^2$ . Finden Sie eine verkürzende (eigentliche) Variation von  $c$ .

**Aufgabe 33** – KÜRZESTE KURVEN ZU EINER MENGE:

Sei  $K \subset M$  eine kompakte Menge mit glattem Rand und  $p \in M \setminus K$ . Zeigen Sie: Ist  $c: [a, b] \rightarrow M$  Kurve eine kürzeste Kurve mit  $c(a) = p$  und  $c(b) \in K$ , so trifft  $c$  die Menge  $K$  senkrecht.

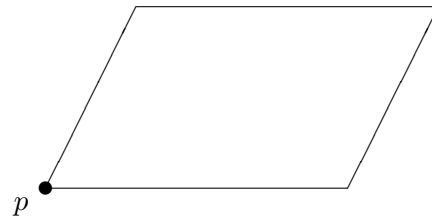
*Tipp:* Was sagt die erste Variation, falls es nicht so ist?

**Aufgabe 34** – SCHNITTORT AUF DEM TORUS:

Der *Schnittort* eines Punktes  $p \in M$  ist die Menge

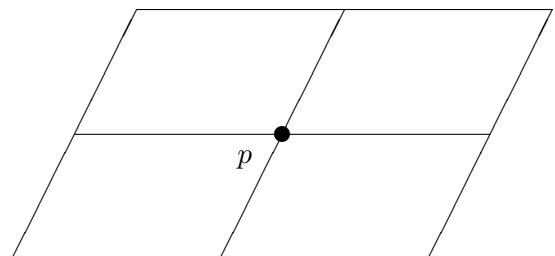
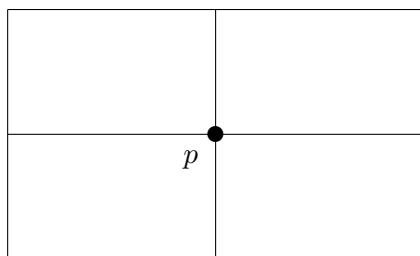
$$C(p) := \{q \in M : \text{es gibt mehr als eine Kürzeste von } q \text{ nach } p\}$$

- a) Die folgenden Abbildungen repräsentieren zweidimensionale Tori, und zwar einen rechteckigen und einen allgemeinen Torus. Zeichnen Sie jeweils  $C(p)$  ein.



Verwenden Sie am besten zwei bzw. drei Farben.

- b) Wir betrachten nun vier nebeneinander liegende Fundamentalbereiche.



Verwenden Sie am besten auch hier unterschiedliche Farben.

- c) Stellen Sie beide Tori als identifiziertes Viereck bzw. Sechseck dar, wobei Sie zu identifizierende Kanten mit Pfeilen versehen. Zeichnen Sie alle Kürzesten vom Mittelpunkt  $p$  zu einem Eckpunkt  $q$  des Vierecks bzw. Sechsecks ein.

d) Sei  $p \in \mathbb{R}P^2$  ein Punkt der projektiven Ebene  $\mathbb{R}P^2$ . Bestimmen Sie die Menge  $C(p)$ .

*Hinweis:* Repräsentieren Sie  $\mathbb{R}P^2$  durch die obere Hemisphäre von  $S^2$ , und wählen Sie  $p$  als Nordpol.

**Aufgabe 35** – GEODÄTISCHE MINIMIEREN NICHT HINTER SCHNITTPUNKT:

Sei  $M$  vollständig und  $c : [0, 1 + \delta) \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\delta > 0$ , so dass  $c|_{[0,1]}$  Kürzeste von  $p = c(0)$  nach  $q = c(1)$  ist.

Zeigen Sie: Gibt es eine weitere Kürzeste zwischen  $p$  und  $q$ , dann ist  $c$  auf  $[0, 1 + \delta]$  nicht mehr Kürzeste.

**Aufgabe 36** – SCHAR GESCHLOSSENER GEODÄTISCHER:

Sei  $M$  Riemannsch und  $h : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1] \rightarrow M$  eine Schar geschlossener Geodätischer, d.h. für alle  $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  ist  $t \mapsto h_s(t)$  geschlossene Geodätische (mit  $\|\frac{\partial h}{\partial t}\|$  konstant). Zeigen Sie: Alle Kurven  $h_s$  haben die gleiche Länge  $\ell(h_s)$ .

**Aufgabe 37** – METRIK IN GAUSSSCHER FORM:

Eine Riemannsche Metrik auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  ist von Gaußscher Form, wenn es eine Funktion  $f : U \rightarrow (0, \infty)$  gibt, so dass für  $X = (\xi^1, \xi^2)$  und  $Y = (\eta^1, \eta^2)$  gilt:

$$g_p(X, Y) = \xi^1 \eta^1 + f(p) \xi^2 \eta^2, \quad p \in U$$

Man kann zeigen, dass sich für jede Fläche stets lokal eine Karte in Gaußscher Form finden läßt.

- Geben Sie eine Orthonormalbasis für jeden Punkt  $p$  an.
- Berechnen Sie die Christoffelsymbole.
- Zeigen Sie: Die  $u$ -Linien,  $c(u) := (u, c) \in U$  sind für jedes  $c$  geodätisch.
- Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der  $v$ -Linien  $\gamma(v) := (c, v)$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

*Tipp:* Parametrisieren Sie lieber nicht auf Einheitsgeschwindigkeit um. Statt dessen können Sie aber leicht ein Normalenfeld  $N(t)$  bestimmen. Wie verhält sich  $\frac{D}{dt}N$  zu  $\frac{D}{dt}c'$ ?

16. Vorlesung, Mittwoch 2.12.09 \_\_\_\_\_

## 5. RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN ALS METRISCHE RÄUME

### 5.1. Riemannsche Distanz.

**Definition.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsch. Für  $p, q \in M$  sei

$$(35) \quad d(p, q) := \inf \{L(c) : c \text{ stückweise differenzierbar und } c(a) = p, c(b) = q\} \in [0, \infty].$$

Wir wollen zwei Fragen untersuchen:

1. Ist  $d$  eine Distanzfunktion bzw. Metrik? Ist also  $d$  positiv definit und symmetrisch, und genügt  $d$  der Dreiecksungleichung?
2. Wird das Infimum angenommen? Wenn das Infimum angenommen wird, so gibt es eine Kürzeste von  $p$  nach  $q$ . Diese ist (nach Umparametrisierung) geodätisch.

Die Antwort auf 2. ist im allgemeinen negativ:

*Beispiel.* In  $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit Standardmetrik wird das Infimum nicht angenommen.

Auch 1. ist nicht ohne weitere Annahmen wahr: Lichtartige Kurven haben immer die Länge 0 und es gilt  $d(p, q) = 0$  für ihre Endpunkte; die in 1. geforderte Definitheit ist verletzt. Es ist daher sinnvoll, allein Metriken mit Index 0 zu betrachten; wir beschränken uns daher in diesem Kapitel auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Auch im Riemannschen Falle ist es nicht unmittelbar klar, dass  $d(p, q) > 0$  für  $p \neq q$  gilt. In diesem Abschnitt wollen wir diese Behauptung beweisen, falls  $q$  das Bild eines genügend kurzen Tangentialvektors ( $\neq 0$ ) unter der Exponentialabbildung bezüglich  $p$  ist. Genauer zeigen wir dies für  $q$  in der folgenden Menge:

**Definition.** Es sei

$$\exp_p: \{v \in T_p M : \|v\| < r\} \rightarrow M$$

definiert und Diffeomorphismus auf sein Bild. Dann heißt das Bild  $B_r(p) \subset M$  ein *normaler Ball*; die Zahl  $r > 0$  heißt *Radius*.

*Beispiele.* 1. Auf Sphäre und Einheitszylinder ist  $B_r(p)$  normaler Ball genau für  $0 < r \leq \pi$ .  
2. In  $\mathbb{R}^n$  ist  $B_r(p)$  normal für alle  $r > 0$ .

Folgende Eigenschaften werden wir noch benötigen:

**Satz 30.** Sei  $(M, g)$  Riemannsch.

- (i) Für jedes  $p \in M$  existiert ein  $r = r(p) > 0$ , so dass  $B_r(p)$  ein normaler Ball ist.
- (ii) Ist  $K$  kompakt, so ist für alle  $p \in K$  der Radius unabhängig von  $p$  wählbar.

Wüßte man von vornherein, dass  $r$  in (i) als eine stetige Funktion von  $p$  gewählt werden kann, so wäre (ii) eine sofortige Folgerung aus (i). Leider ist es aber nicht so und wir werden uns den gewünschten Radius durch eine Anwendung des Umkehrsatzes beschaffen.

*Beweis.* (i) Nach Korollar 21 gibt es stets eine Umgebung  $U$  der 0, so dass  $\exp_p$  definiert und Diffeomorphismus ist. Also gibt es  $r > 0$  mit  $\{\|v\| < r\} \subset U$ .

(ii) Wie im Beweis von Satz 19 sei wieder  $E \subset TM$  der Definitionsbereich von  $\exp$ . Wir betrachten die Abbildung

$$F: E \rightarrow M \times M, \quad F(p, v) := (p, \exp_p v).$$

Wir benötigen auch das Differential von  $F$ , allerdings nur in Punkten  $(p, 0)$ . Nach Identifikation linearer Räume gilt  $T_{(p,0)}(TM) = T_p M \times T_0(T_p M) = T_p M \times T_p M$ . Weiter hat das Bild Werte in  $T(M \times M) = TM \times TM$ .

Speziell gilt  $F(p, 0) = (p, p)$  und daher einerseits  $dF_{(p,0)}(v, 0) = (v, v)$ . Wegen  $d(\exp_p)_0 = \text{id}$  gilt andererseits  $dF_{(p,0)}(0, w) = (0, w)$  und es ergibt sich insgesamt folgende Blockgestalt:

$$dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 1_n & 1_n \end{pmatrix}$$

Insbesondere hat  $dF$  in  $(p, 0)$  den maximalen Rang  $2n$ .

Der Umkehrsatz sagt daher, dass  $F$  ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von  $(p, 0) \in TM$  auf eine Umgebung von  $(p, p) \in M \times M$  ist. Nach Verkleinerung dieser Mengen dürfen wir annehmen, dass für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Menge  $U \ni p$  sowie  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $F$  die spezielle Umgebung der Form  $U \times \{\|v\| < \varepsilon\}$  auf eine Umgebung der Diagonale  $U \times U$  diffeomorph abbildet. Insbesondere ist dann  $\exp$  auf  $\{p\} \times \{\|v\| < \varepsilon\}$  Diffeomorphismus, und diese Eigenschaft bleibt natürlich auch auf Vereinigungen solcher Mengen erhalten.

Weil  $K$  kompakt ist, wird  $K \times \{0\} \subset TM$  von endlich vielen Mengen  $U_i \times \{\|v\| < \varepsilon_i\}$  überdeckt. Setzen wir also  $r := \min\{\varepsilon_i\}$ , so wird  $K \times \{\|v\| < r\}$  diffeomorph nach  $M \times M$  abgebildet.  $\square$

## 17. Vorlesung, Dienstag 8.12.09

---

**5.2. Radiale Geodätische sind Kürzeste.** Wir rechtfertigen nun unsere Bezeichnung "Ball vom Radius  $r$ " für  $B_r(p)$ , indem wir  $d(p, q) < r$  für jedes  $q$  aus  $B_r(p)$  zeigen:

**Satz 31.** Sei  $M$  Riemannsch,  $p \in M$  und  $B_R(p)$  ein normaler Ball. Für jedes  $q = \exp_p(v) \in B_R(p)$  ist die Geodätische von  $p$ ,

$$c_{p,v}(t) \subset B_R(p), \quad t \in [0, 1]$$

die Kürzeste unter allen stückweise differenzierbaren Kurven von  $p$  nach  $q$ . Zusatz: Jede gleich lange Kurve ist eine monotone Umparametrisierung von  $c_{p,v}$ .

*Beweis.* Sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine weitere Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Wir müssen zeigen  $L(c) \geq L(c_{p,v}) = \|v\|$ . Um dies zu zeigen, werden wir Polarkoordinaten verwenden. Es ist instruktiv, sich den folgenden Beweis im Spezialfall der Sphäre zu überlegen (Übung).

(i) Fall  $c \subset B_R(p)$ . OBdA. können wir annehmen  $c(t) \neq p$  für alle  $t > 0$ , denn sonst gibt es eine Einschränkung von  $c$  auf ein Intervall  $[t_0, 1]$  mit dieser Eigenschaft. Da  $\exp$

Diffeomorphismus auf  $B_R$  ist, kann man eindeutig schreiben  $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$  mit  $r: [0, 1] \rightarrow [0, R]$  und  $v: (0, 1] \rightarrow T_p M$ ,  $\|v(t)\| = 1$ .

Als Vorüberlegung betrachten wir die Abbildung  $h(\sigma, \tau) := \exp_p(\tau v(\sigma))$ . Für jedes  $\sigma$  ist  $\tau \mapsto h(\sigma, \tau)$  geodätisch mit Anfangsgeschwindigkeit  $v(\sigma)$ . Also gilt

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \tau} \right\|^2 = \left\| d(\exp_p)_{\tau v(\sigma)} \cdot v(\sigma) \right\|^2 \stackrel{\text{Gauß-L.}}{=} \|v(\sigma)\|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial \sigma} = d(\exp_p)_{\tau v(\sigma)} \left( \frac{dv}{d\sigma} \tau \right)$$

für alle  $(\sigma, \tau)$ . Setzen wir  $w(\sigma) := \frac{d}{d\sigma} v(\sigma)$  so folgt durch Differenzieren von  $\|v(\sigma)\|^2 = 1$ , dass  $g(v(\sigma), w(\sigma)) = 0$ . Aus dem Gauß-Lemma folgt deshalb  $g\left(\frac{\partial h}{\partial \sigma}, \frac{\partial h}{\partial \tau}\right) = 0$  für alle  $(\sigma, \tau)$ .

Nun setzen wir  $\sigma := t$  und  $\tau := r(t)$ , d.h.

$$h(t, r(t)) = \exp_p(r(t)v(t)) = c(t), \quad 0 < t \leq 1$$

Die Kettenregel liefert die folgende Zerlegung von  $c'$  in normalen und radialen Anteil:

$$c'(t) = \frac{\partial h}{\partial \sigma}(t, r(t)) + \frac{\partial h}{\partial \tau}(t, r(t)) r'(t)$$

Unter Benutzung der Vorbemerkungen können wir die Länge ausrechnen:

$$\|c'(t)\|^2 = g(c'(t), c'(t)) = \left\| \frac{\partial h}{\partial \sigma}(t, r(t)) \right\|^2 + |r'(t)|^2 \geq |r'(t)|^2 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Also gilt für  $\varepsilon > 0$ :

$$L(c) \geq \int_{\varepsilon}^1 \|c'(t)\| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 |r'(t)| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon) = L(c_{p,v}) - r(\varepsilon)$$

Da  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt  $L(c) \geq L(c_{p,v})$ .

Wir zeigen nun den Zusatz. Im Gleichheitsfall gilt  $\left\| \frac{\partial h}{\partial \sigma}(t, r(t)) \right\| = 0$  für alle  $t \in [0, 1]$ , also  $v(t)$  konstant und  $|r'(t)| = r'(t) \geq 0$  für alle  $t$ . Daher ist  $c$  monotone Reparametrisierung von  $c_{p,v}$ .

(ii) Es sei  $t_1$  der erste Punkt, für den  $c(t_1)$  nicht mehr in  $B_R(p)$  liegt. Teil (i) zeigt dann

$$L(c) \geq L(c|_{[0, t_1]}) \geq R > L(c_{p,v}).$$

□

*Bemerkung.* Man kann auch statt eines normalen Balles  $B_r$  eine offene Umgebung  $U$  einer radialen Geodätischen betrachten, so dass  $d\exp_p$  auf  $U$  vollen Rang hat. Dann zeigt der Satz, dass jede Kurve  $\exp_p h_s(t)$  länger als die radiale Strecke  $c_{p,v} = \exp_p h_0(t)$  ist, sofern nur  $h_s(t)$  in  $U$  liegt.

5.3. **Metrik.** Wir beantworten nun die eingangs gestellte Frage 1.

**Satz 32.** Sei  $(M, g)$  Riemannsch.

(i) Durch (35) wird eine Metrik  $d$  auf  $(M, g)$  definiert.

(ii) Die induzierte Topologie dieser Metrik stimmt mit der von  $(M, g)$  überein.

Die zweite Eigenschaft bedeutet, dass eine Folge  $(p_i)$  genau dann gegen  $p$  konvergiert, wenn die Zahlenfolge  $(d(p_i, p))$  gegen 0 konvergiert.

*Beweis.* (ii) Aus Satz 31 folgt: Für jedes  $p$  gibt es ein  $r$ , so dass  $B_r(p)$  metrischer Ball ist. Also enthält jede offene Umgebung um  $p$  einen metrischen Ball, und umgekehrt.

(i) 1. Endlichkeit,  $d(p, q) < \infty$ : Es sei  $C_p \subset M$  die Menge der mit  $p \in M$  durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbindbaren Punkte. Ist  $q \in C_p$ , so liegt auch jede Kartenumgebung von  $q$  in  $C_p$ . Also ist  $C_p$  offen. Ebenso liegt auch für jedes  $q \in M \setminus C_p$  jede Kartenumgebung in  $M \setminus C_p$ . Also ist  $C_p$  abgeschlossen. Wegen  $p \in C_p$  ist  $C_p \neq \emptyset$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, folgt  $C_p = M$ .

2. Symmetrie,  $d(p, q) = d(q, p)$ : Läuft  $c: [a, b] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ , so läuft die Kurve  $\tilde{c} := c(a + b - t): [a, b] \rightarrow M$  von  $q$  nach  $p$ . Es ist  $L(\tilde{c}) = L(c)$  (warum?).

3. Dreiecksungleichung,  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ : Die Zusammensetzung stückweise differenzierbarer Kurven bleibt stückweise differenzierbar; dabei ist die Länge additiv.

4. Definitheit,  $p \neq q \implies d(p, q) > 0$ : Wegen  $p \neq q$  gibt es disjunkte offene Umgebungen  $V(p)$  und  $V(q)$  in  $M$ . Laut Korollar 21 gibt es einen normalen Ball  $B_r(p) \subset V(p)$ . Nach Satz 31 hat jede Kurve von  $p$  nach  $q$  mindestens Länge  $r$ .  $\square$

18. Vorlesung, Mittwoch 9.12.09 \_\_\_\_\_

Nun können wir ein Argument verwenden, das in jedem metrischen Raum gilt: Aus der Dreiecksungleichung  $d(p, q) \leq d(p, q_0) + d(q_0, q)$  folgt die verschärfte Dreiecksungleichung  $|d(p, q) - d(p, q_0)| \leq d(q, q_0)$ . Sie zeigt, dass  $q \mapsto d(p, q)$  Lipschitz ist. Insbesondere:

**Korollar 33.** Für jedes  $p \in M$  ist die auf  $M$  definierte Funktion  $q \mapsto d(p, q)$  stetig.

Beispielsweise folgt daraus, dass auch auf dem Abschluss eines normalen Balles die Distanz noch durch die Länge radialer Geodätischer gegeben wird; diese Tatsache benutzen wir im folgenden.

5.4. **Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten.** Wir kommen nun zur zweiten Frage: Wann wird das Infimum der Länge angenommen?

Ein metrischer Raum  $(M, d)$  heißt bekanntlich *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert, d.h. ist  $(p_i) \in M$  mit  $d(p_i, p_j) \rightarrow 0$ , so existiert ein  $p \in M$  mit  $d(p, p_i) \rightarrow 0$ . Wir fordern die Vollständigkeit im Riemannsches Fall:

**Definition.** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *vollständig*, wenn es  $M$  mit der Metrik (35) ist.

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{R}P^n, T^n$  sind vollständig, nicht aber diese Mannigfaltigkeiten minus ein Punkt.

2. Auf  $\mathbb{R}^n$  ist die durch stereographische Projektion von  $\mathbb{S}^n$  induzierte Metrik nicht vollständig.

3. Auf dem offenen Ball  $B^n$  ist die Poincaré-Metrik vollständig, siehe (4).

4. Jede kompakte Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Sei dazu  $(p_i)$  Cauchyfolge, also  $d(p_i, p_j) \rightarrow 0$  für  $i, j \rightarrow \infty$ . Weil kompakte metrische Räume folgenkompakt sind, gibt es ein  $p$ , so dass eine Teilfolge gegen  $p$  konvergiert,  $(p_{i_j}) \rightarrow p$ . Aber wegen der Cauchy-Eigenschaft konvergiert dann die ganze Folge (Dreiecksungleichung).

**Satz 34.** *Wenn  $(M, d)$  vollständig ist, so kann jede Geodätische in  $M$  fortgesetzt werden zu einer auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Geodätischen.*

Man nennt diese Eigenschaft auch die *geodätische Vollständigkeit*.

*Beweis.* Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $(M, g)$  und  $I$  ihr maximaler Definitionsbereich. Nach dem lokalen Existenzsatz ist  $I \neq \emptyset$  offen; wir zeigen  $I$  ist auch abgeschlossen.

Sei  $I \supset [a, b) \ni t_i \nearrow b \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen  $b \in I$ . Da

$$d(c(t_i), c(t_j)) \leq L(c|_{[t_i, t_j]}) = |t_i - t_j| \rightarrow 0$$

ist  $c(t_i)$  Cauchy-Folge und besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert  $p \in M$ . Wir fügen diesen Punkt zur Geodätischen hinzu, d.h. wir betrachten die Menge  $K := c([a, b)) \cup \{p\}$ . Nach Satz 30(ii) gibt es ein  $r > 0$ , so dass für jedes  $q \in K$  der Ball  $B_r(q)$  normal ist.

Wegen  $c(t_i) \rightarrow p$  finden wir ein  $i$  mit  $t_i + r > b$ , d.h.  $d(p, c(t_i)) < r$ . Aber dann ist  $c$  enthalten in einer radialen Geodätischen von  $B_r(c(t_i))$ , und daher auch noch für  $(t_i - r, t_i + r)$  definiert; wegen  $t_i + r > b$  also auf einem offenen Intervall über  $b$  hinaus.  $\square$

**Korollar 35.** *Ist  $(M, g)$  vollständig, so ist  $\exp_p v$  für alle  $p \in M$  und alle  $v \in T_p M$  definiert.*

Die Umkehrung von Satz und Korollar gelten; Beweise siehe z.B. [doC, Thm. 2.8, S. 146].

Sind zwei Punkte  $p, q$  in einem normalen Ball enthalten, so gibt es eine Geodätische von  $p$  nach  $q$ , die Kürzeste ist (Satz 31). Wir zeigen dies nun allgemein:

**Satz 36** (Hilbert 1905, Hopf, Rinow 1931). *Ist  $(M, g)$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, so lässt sich jedes Paar von Punkten  $p, q \in M$  durch eine Geodätische  $c$  mit  $L(c) = d(p, q)$  (also eine Kürzeste) verbinden.*

Die Vollständigkeit ist nicht notwendig für die Richtigkeit der Aussage: Auch auf dem offenen Einheitsball  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  mit Standardmetrik gibt es zwischen je zwei Punkten eine eindeutige Kürzeste.

Die gewünschte Geodätische  $\exp_p(tv)$  von  $p$  nach  $q$  werden wir bestimmen, indem wir die Richtung  $v$  dadurch gewinnen, dass wir zunächst die Distanz von  $q$  zu einem normalen Ball  $B_r(p)$  minimieren. Diese Möglichkeit gewinnen wir durch die folgende Aussage:

**Lemma 37.** *Sei  $B_\rho(q_0)$  normaler Ball,  $q \notin B_\rho(q_0)$ . Dann existiert ein  $\zeta \in S_\rho(q_0) := \partial B_\rho(q_0)$  mit  $d(q_0, q) = d(q_0, \zeta) + d(\zeta, q)$ , d.h. die auf  $S_\rho(q_0)$  definierte Funktion  $\zeta \mapsto d(\zeta, q)$  nimmt ihr Minimum  $d(q_0, q) - \rho$  in  $\zeta$  an.*

Wegen Satz 31 ist  $d(q_0, \zeta) = \rho$ .

*Beweis.* Für jedes  $\eta \in S_\rho(q_0)$  ist laut Dreiecks-Ungleichung

$$d(q_0, q) \leq d(q_0, \eta) + d(\eta, q) = \rho + d(\eta, q).$$

Durch Betrachtung des Infimums folgt damit einerseits

$$d(q_0, q) \leq \rho + d(S_\rho(q_0), q).$$

Andererseits bedingt  $q \notin B_\rho(q_0)$ , dass jede Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow M$  von  $q_0$  nach  $q$  die Menge  $S_\rho(q_0)$  schneidet. Also existiert ein  $t_0$  mit  $c(t_0) \in S_\rho(q_0)$ . Es ist

$$L(c) = L(c|_{[0, t_0]}) + L(c|_{[t_0, 1]}) \stackrel{\text{Satz 31}}{\geq} \rho + d(S_\rho(q_0), q)$$

Daher ist auch

$$d(q_0, q) = \inf_c L(c) \geq \rho + d(S_\rho(q_0), q)$$

und es folgt die Gleichheit.

Schließlich ist  $S_\rho(q_0)$  kompakt und  $d(\cdot, q)$  laut Korollar 33 stetig; daher existiert ein  $\zeta \in S_\rho(q_0)$  mit  $d(\zeta, q) = d(S_\rho(q_0), q)$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Hopf-Rinow.* Es sei  $p \neq q$  und  $B_r(p)$  ein normaler Ball. Falls  $q \in B_r(p)$  sind wir nach Satz 31 fertig. Wenn nicht, ist  $r \leq d(p, q)$  und das Lemma liefert einen Punkt  $z \in S_r(p)$ , in dem die stetige Funktion  $d(q, \cdot)$  ein Minimum auf  $S_r(p)$  annimmt. Wir schreiben  $z = \exp_p(rv)$  für  $\|v\| = 1$ . Wegen der Vollständigkeit von  $M$  existiert gemäß Korollar 35 die Geodätische  $c(t) = \exp_p(tv)$  für alle Zeiten  $t$ . Da  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, müssen wir  $c(d(p, q)) = q$  zeigen.



Es sei  $I$  die Menge der  $0 \leq t \leq d(p, q)$ , für die gilt

$$(36) \quad d(p, q) = d(p, c(t)) + d(c(t), q).$$

Gilt (36) für eine Folge  $(t_k)$ , so wegen der Stetigkeit von  $c$  und  $d$  auch für ihren Grenzwert  $t = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$ . Also ist  $I$  abgeschlossen und es existiert  $T := \max I$ . Die Zahl  $T$  gibt also an, bis zu welcher Zeit die Geodätische  $c$  noch die Länge realisiert. Aus  $r \in I$  folgt  $T > 0$ . Wir behaupten nun  $T = d(p, q)$ . Dies zeigt dann  $c(d(p, q)) = q$ , wie gewünscht.

Zum Beweis der Behauptung zeigen wir: Ist  $T < d(p, q)$ , dann ist auch  $T + \rho \in I$  für kleine  $\rho$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $T$ .

Es sei  $B_\rho(c(T))$  ein normaler Ball um  $c(T)$  mit Rand  $S_\rho(c(T))$ ; wir nehmen  $0 < \rho < d(p, q) - T$  an, so dass  $q$  außerhalb von  $B_\rho(c(T))$  liegt. Wiederum laut Lemma gibt es eine Minimalstelle  $\zeta$  von  $d(q, \cdot)$  auf  $S_\rho(c(T))$  mit

$$(37) \quad d(p, q) \stackrel{T \in I}{=} d(p, c(T)) + d(c(T), q) \stackrel{\text{Lemma}}{=} d(p, c(T)) + d(c(T), \zeta) + d(\zeta, q)$$

und daher

$$d(p, \zeta) \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} d(p, c(T)) + d(c(T), \zeta) \stackrel{(37)}{=} d(p, q) - d(\zeta, q) \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} d(p, \zeta).$$

Also gilt sogar Gleichheit in der ersten Ungleichung, d.h.

$$(38) \quad d(p, \zeta) = d(p, c(T)) + d(c(T), \zeta).$$

Wir erhalten demnach eine stückweise differenzierbare Kürzeste, indem wir an die Geodätische  $c$  von  $p$  nach  $c(T)$  verketteten mit der radialen Geodätische von  $c(T)$  nach  $\zeta$ .

Nach Korollar 28 folgt, dass diese Kürzeste differenzierbar ist (das entscheidende Argument in diesem Beweis!). Also liegt  $\zeta$  in Wahrheit auf  $c$ , d.h.  $\zeta = c(T + \rho)$ . Einsetzen von (38) in die rechte Seite von (37) liefert

$$d(p, q) = d(p, c(T + \rho)) + d(c(T + \rho), q),$$

also  $T + \rho \in I$ . □

## 5.5. Übungsaufgaben.

### Aufgabe 38 – STRAHLEN:

Ein *Strahl* durch  $p$  ist eine Geodätische  $c : [0, \infty) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$ , die auf jedem endlichen Teilstück Kürzeste ist. Sei  $M$  vollständig, aber nicht kompakt.

Zeigen Sie: Für jedes  $p \in M$  gibt es einen Strahl durch  $p$ .

### Aufgabe 39 – ROTATIONS-PARABOLOID:

- a) Jede vertikale Ursprungsebenen schneidet das Rotationsparaboloid  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$  in einer Geodätischen.  
*Tipp:* Benutzen Sie die Spiegelsymmetrie von  $P$  um die Ebene.
- b) Benutzen Sie die vorige Aufgabe, um zu zeigen, dass jeder dieser Schnitte Strahlen durch den Pol 0 des Paraboloids definiert.
- c) Zeigen Sie, dass genügend lange Teilstücke im Schnitt von  $P$  mit vertikalen Ursprungsebenen nicht Kürzeste sind.  
*Tipp:* Es reicht Geodätische durch 0 zu betrachten, die symmetrisch um 0 sind. Betrachten Sie die Distanz der Endpunkte.

#### Aufgabe 40 – KÜRZESTE AUF POLYEDERN:

- a) Es sei  $M$  die Oberfläche eines Würfels. Wir wollen die Kürzeste in  $M$  zwischen zwei Punkten  $p, q \in M$  ermitteln. Es sei  $p$  der Mittelpunkt einer Würfelfläche  $F$  und  $q$ :
- Mittelpunkt auf einer Nachbarfläche, oder
  - Mittelpunkt einer Kante, die nur eine Ecke mit  $F$  gemeinsam hat.
- Kann man  $p, q$  so wählen, dass eine Kürzeste durch eine Ecke läuft?
- b) Versuchen Sie Kürzeste auf allgemeinen Polyedern zu analysieren, indem Sie unterscheiden: Innerhalb der Flächen, in Kanten, in Ecken mit Gesamtwinkel  $<, =, > 2\pi$ .  
*Tipp:* Eine Möglichkeit, Kürzeste in den Ecken zu verstehen, ist es, Kürzeste auf drei, vier oder fünf zusammengeklebten Vierecken zu verstehen.

#### Aufgabe 41 – EXPONENTIALABBILDUNG UND VOLLSTÄNDIGKEIT:

- a) Sei  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M = \mathbb{R}^n$  definiert. Zeigen Sie, dass für jedes  $q \in M$  ein  $v \in T_p M$  existiert, so dass  $t \mapsto \exp_p tv$  auf  $[0, 1]$  parametrisierte Kürzeste von  $p$  nach  $q$  ist.
- b) Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gibt es ein  $p \in M$ , so dass  $\exp_p$  auf ganz  $\mathbb{R}^n = T_p M$  definiert ist, so ist  $M$  vollständig.

#### Aufgabe 42 – TRANSITIVE ISOMETRIEN:

Wenn die Isometriegruppe transitiv auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  operiert, d.h. für alle  $p, q \in M$  gibt es eine Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(p) = q$ , so ist  $M$  vollständig.

*Tipp:* Benutzen Sie das Ergebnis der letzten Aufgabe.

19. Vorlesung, Dienstag 15.12.09 \_\_\_\_\_

## 6. HYPERBOLISCHER RAUM

In diesem Kapitel behandeln wir das vielleicht wichtigste Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, den hyperbolischen Raum. Wie wir später noch sehen werden, ist  $\mathbb{H}^n$  der  $n$ -dimensionale Standardraum mit Krümmung  $-1$ , während  $\mathbb{R}^n$  Krümmung 0 hat und  $\mathbb{S}^n$  Krümmung  $+1$ .

Nach einem Satz von Hilbert ist die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}^2$  nicht nach  $\mathbb{R}^3$  isometrisch einbettbar (Beweis siehe z.B. Spivak III, Ch. 5, Thm. 12). Der ganze Raum  $\mathbb{H}^2$  kann daher nicht als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  konstruiert werden. Teilstücke sind aber durchaus einbettbar: Die Traktrix erzeugt eine Rotationsfläche mit  $K \equiv -1$ , die sogenannte *Pseudosphäre*; sie ist aber nicht vollständig (und auch nicht einfach zusammenhängend).

Folgende Modelle für  $\mathbb{H}^n$  sind gängig:

(i) Hyperboloid: Hyperfläche des Lorentz-Raums  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  (beste Analogie zu  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , gut zu rechnen)

(ii) Poincaré:  $(B^n, \frac{4}{(1-|p|^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (anschaulich).

(iii) oberer Halbraum:  $(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \frac{1}{p_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (etwas weniger anschaulich, aber noch gut zu rechnen)

(iv) Klein:  $(B^n, ?)$ , Geodätische sind Geraden.

Die Formeln für die Metrik (ii) und (iii) sind konform äquivalent zur Standardmetrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wir werden sehen, dass diese zwei Metriken eng verwandt sind.

**6.1. Möbiustransformationen von  $\mathbb{C}$  und oberer Halbebene.** Um im nächsten Abschnitt die hyperbolische Ebene zu diskutieren, sammeln wir in diesem Abschnitt Eigenschaften von Möbiustransformationen, d.h. von gebrochen linearen Transformationen. Man definiert sie am besten auf der kompaktifizierten komplexen Ebene  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$ .

**Definition.** Eine *Möbiustransformation* ist eine Abbildung

$$f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \quad f(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0,$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Falls  $f$  affin-linear ist, setzen wir  $f(\infty) = \infty$ , anderenfalls  $f(\infty) := \frac{a}{c}$  und  $f(-\frac{d}{c}) := \infty$ .

Die Bedingung  $ad \neq bc$  schließt aus, dass der Nenner Vielfaches des Zählers ist, was  $f$  konstant werden lässt; insbesondere garantiert sie, dass der Nenner nicht identisch verschwindet. Möbiustransformationen sind holomorph, wobei Holomorphie in  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  dadurch definiert ist, dass die Zusammensetzung mit  $1/z$  holomorph bleibt.

**Satz 38.** (i) Die Menge  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  der biholomorphen Abbildungen von  $\hat{\mathbb{C}}$  stimmt mit der Menge der Möbiustransformationen überein.

(ii) Die Abbildung

$$\Phi: \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Diff}(\hat{\mathbb{C}}) = \{\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ Diffeom.}\}, \quad T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto Tz := \frac{az + b}{cz + d},$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* (i) Der Beweis folgt aus funktionentheoretischer Argumentation, siehe z.B. Vorlesung Funktionentheorie 2.

(ii) Für zwei Matrizen  $S, T \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ , dargestellt als  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  rechnen wir  $\Phi(S) \circ \Phi(T) = \Phi(ST)$  nach:

$$(39) \quad S(Tz) = \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} = (ST)(z). \quad \square$$

Die Darstellung einer Möbiustransformationen durch eine Matrix  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist natürlich nicht eindeutig: Offenbar ergibt für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  die Matrix  $T = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$  dieselbe Möbiustransformation. Man versteht  $\Phi$  auch als Identifikation und schreibt dann  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  für die Menge der Möbiustransformationen, wobei das P für *projektiv* steht. Reelle Matrizen  $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$  werden durch die Untergruppe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$  mit Determinante 1 eindeutig repräsentiert; im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass diese Möbiustransformationen die obere Halbebene in sich selbst abbilden.

**Satz 39.** (i)  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  wird erzeugt von:

- Translationen  $z \mapsto z + \beta$  mit  $\beta \in \mathbb{C}$ ,
- Drehstreckungen  $z \mapsto \alpha z$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  und
- Inversionen  $z \mapsto -1/z$ .

(ii)  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  wird durch die gleichen Operationen erzeugt, wobei  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

(iii) Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise ab.

(iv) Möbiustransformationen sind konform (winkeltreu) und orientierungserhaltend.

Wenn eine Möbiustransformation einen Kreis auf einen Kreis abbildet, so ist im allgemeinen das Bild des Mittelpunktes nicht unbedingt der Mittelpunkt des Bildkreises.

*Beweis.* (i) Sei  $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $ad - bc \neq 0$ . Im Falle  $c = 0$  ist  $T$  affin-linear und die Aussage klar. Anderenfalls können wir schreiben:

$$\begin{aligned} z & \xrightarrow{\text{Transl.}} z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{Inv.}} \frac{-1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Drehstr.}} \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{-1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{bc - ad}{c^2 z + cd} \\ & \xrightarrow{\text{Transl.}} \frac{bc - ad}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad + acz + ad}{c^2 z + cd} = \frac{b + az}{cz + d} \end{aligned}$$

(ii) Sei nun  $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , mit  $ad - bc = 1$ . Offenbar sind die unter (i) benutzten Translationen reell, und die Streckung ist bezüglich eines positiven Faktors. Die drei benutzten Transformationen stimmen für eine Matrix und ihr Negatives überein; daher sind sie wohldefiniert auf  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Die Behauptung folgt.

(iii) Es reicht zu zeigen, dass die angegebene Eigenschaft für die Erzeugenden aus (i) gilt. Für Translationen und Drehstreckungen ist das klar.

Um den Fall von Inversionen zu behandeln, behaupten wir zuerst, dass Geraden und Kreise genau diejenigen Punktmenge in  $\mathbb{C}$  sind, die Gleichungen der Form

$$(40) \quad s|z|^2 + pz + \bar{p}\bar{z} + t = 0, \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad |p|^2 > st$$

erfüllen. Tatsächlich erfüllt ein Kreis um  $q \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r > 0$  die Gleichung  $|z - q|^2 = r^2$ , oder äquivalent, nach Multiplikation mit  $s \neq 0$ ,

$$0 = s(|z - q|^2 - r^2) = s|z|^2 - s\bar{q}z - sq\bar{z} + s(|q|^2 - r^2).$$

Im Falle  $s \neq 0$  ist also jede Lösungsmenge von (40) ein Kreis. Andererseits nimmt (40) im Falle  $s = 0$  aber die Form einer Geradengleichung an, denn

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}, z \right\rangle + t = (p_1 z_1 - p_2 z_2) + t = \operatorname{Re}(pz) + t = \frac{p}{2}z + \frac{\bar{p}}{2}\bar{z} + t.$$

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass gespiegelte Inversionen die Lösungsmengen von (40) auf Lösungsmengen von Gleichungen desselben Typs abbilden. Setzt man aber  $z = -\frac{1}{w}$  in (40) ein und multipliziert mit  $|w|^2$ , so erhält man die Gleichung  $s - \bar{p}w - \bar{p}w + t|w|^2 = 0$ , also wieder eine Gleichung derselben Form.

(iv) folgt daraus, dass  $Tz$  holomorph ist. □

Wir benötigen noch eine spezielle Möbiustransformation, die zeigt dass die Kreisscheibe  $D$  und die obere Halbebene  $H^2 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  konform äquivalent sind:

**Lemma 40.** Die Cayley-Abbildung genannte Möbiustransformation in  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})$

$$\eta: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \eta(z) := \frac{z - i}{z + i}.$$

bildet bijektiv aufeinander ab:  $\eta(H^2) = D$  und  $\eta(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \partial D$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $\eta \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})$  und bildet die Menge der Geraden und Kreise in sich ab. Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $|a - i| = |\overline{a - i}| = |a + i|$ , so dass  $|\eta(a)| = 1$ . Wegen Injektivität und der Kreis-/Geradentreue bildet  $\eta$  die Gerade  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  bijektiv auf  $\mathbb{S}^1$  ab.

Wegen der Bijektivität von Möbiustransformationen bildet  $\eta$  die Menge  $H^2$  entweder auf  $D$  oder auf  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  ab; aus  $\eta(i) = 0$  folgt daher die Behauptung. □

**6.2. Oberes Halbebene-Modell der hyperbolischen Ebene.** Wir wollen zuerst den zweidimensionalen Fall studieren. Wenn wir komplexe Zahlen zur Hilfe nehmen, können wir die Metrik auf  $H^2$  schreiben als  $g(X, Y) := \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle X, Y \rangle$ . Wir erinnern zuerst daran, dass  $\varphi: M \rightarrow M$  Isometrie ist, wenn gilt  $g_p(X, Y) = g_{\varphi(p)}(d\varphi_p X, d\varphi_p Y)$ .

- Satz 41.** (i) Die Gruppe orientierungserhaltender Isometrien von  $H^2$  ist  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .  
(ii)  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  bildet die Menge  $\mathcal{K}$  der auf der  $x$ -Achse senkrechten Halbkreise und Strahlen in sich selbst ab.  
(iii)  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  bildet  $\mathcal{K}$  transitiv in sich selbst ab, d.h. für jedes Paar  $k, l \in \mathcal{K}$  gibt es ein  $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  mit  $Tk = l$ .

Allerdings ist die Abbildung  $T$  aus (iii) nicht eindeutig: es gibt eine Ein-Parameter-Schar von Möbiustransformationen, die einen Kreis zwar als Menge, aber nicht punktweise fixieren.

*Beweis.* (i) Seien  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ . Dann bilden Translationen der Form  $z \mapsto z + \beta$ , Drehstreckungen der Form  $z \mapsto \alpha z$  die Menge  $H^2$  auf sich selbst ab. Das gilt auch für Inversionen  $z \mapsto -1/z$ , denn

$$(41) \quad \mathrm{Im} \frac{-1}{z} = \mathrm{Im} \frac{-\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-\mathrm{Im} \bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \mathrm{Im} z.$$

Sicher ist eine Translation Isometrie, und für eine Drehstreckung  $\varphi(z) = \alpha z$  gilt

$$g_{\varphi(z)}(d\varphi X, d\varphi Y) = \frac{1}{(\mathrm{Im} \alpha z)^2} \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2} \langle X, Y \rangle = g_z(X, Y).$$

Für jede holomorphe Abbildung  $\varphi$  gilt  $d\varphi_z(v) = \varphi'(z)v$ . Daraus folgt für die Inversion  $\varphi(z) = -\frac{1}{z}$  mit  $\varphi'(z) = 1/z^2$ , dass wegen (41) tatsächlich gilt

$$g_{\varphi(z)}(d\varphi X, d\varphi Y) = \frac{|z|^4}{(\mathrm{Im} z)^2} \left\langle \frac{X}{z^2}, \frac{Y}{z^2} \right\rangle = \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2} \langle X, Y \rangle = g_z(X, Y).$$

Nach Satz 39(ii) erzeugen diese Abbildungen ganz  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Wir werden am Ende des Abschnitts angeben, warum es keine weiteren orientierungserhaltenden Isometrien gibt.

(ii) Offenbar bildet jedes  $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  die erweiterte  $x$ -Achse  $A := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  in sich selbst ab. Ein Halbkreis oder Strahl in  $\mathcal{K}$  schneidet  $A$  in zwei Punkten senkrecht. Wegen Konformität und Kreis-/Geradentreue von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , siehe Satz 39(iv), gilt das gleiche für das Bild.

(iii) Es gibt Elemente von  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , die den Punkt  $i$  fixieren, und den Tangentialraum um einen beliebigen Winkel drehen: Tatsächlich kann man mit der Cayley-Transformation  $i$  auf 0 abbilden, die Kreisscheibe drehen, und dann wieder die Kreisscheibe auf  $H^2$  abbilden. Weiter kann man  $i$  durch ein Element von  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  auf jeden beliebigen Punkt  $p \in H^2$  abbilden: Dies sieht man durch geeignete Zusammensetzung von reeller Translation und reeller Drehstreckung. Die zusammengesetzte Abbildung dreht dann beliebig um  $p$ .

Durch Zusammensetzung wird klar: Seien  $k, l \in \mathcal{K}$  und seien  $p \in k$ ,  $q \in l$  beliebig gewählt. Wählen wir nun eine Möbiustransformation, die  $p$  auf  $q$  abbildet, und komponieren sie

noch mit einer passenden Drehung um  $q$ , so wird unter der zusammengesetzten Abbildung gerade  $k$  auf  $l$  abgebildet. Das ist genau die Transitivität.  $\square$

## 20. Vorlesung, Mittwoch 16.12.09

---

Bevor wir die Geodätischen diskutieren, wollen wir noch ein Symmetrie-Argument im Allgemeinen formulieren.

**Definition.** Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  in einer Mannigfaltigkeit  $N$  heißt *total geodätisch*, wenn jede Geodätische von  $M$  auch eine Geodätische von  $N$  ist.

Man kann sagen, dass sich  $M$  innerhalb von  $N$  nicht krümmt.

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ , oder jeder andere affine Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ .

2. Jedes offene Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist total geodätisch.

3.  $\mathbb{S}^n \cap W$ , wobei  $W$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, z.B. 2-Sphären in  $\mathbb{S}^3$ .

4. Die eindimensionalen total geodätischen Untermannigfaltigkeiten sind Geodätische (mit maximalem Definitionsbereich).

5. Punkte sind nulldimensionale total geodätische Untermannigfaltigkeiten: Sie enthalten konstante Geodätische.

**Satz 42.** *Ist  $M \subset N$  Zusammenhangskomponente einer Fixpunktmenge einer Isometrie  $\sigma: N \rightarrow N$ , so ist  $M$  total geodätisch in  $N$ . Ist speziell  $M$  eine ein-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist  $M$  geodätisch (bei geeigneter Parametrisierung).*

*Beweis.* Sei  $c = c_{p,v}$  eine Geodätische mit Anfangswerten  $c(0) = p \in M$  und  $c'(0) = v \in T_p M \subset T_p N$ . Dann ist auch das isometrische Bild  $\sigma \circ c$  geodätisch. Aber  $c$  und  $\sigma \circ c$  haben gleiche Anfangsbedingungen und daher gilt  $c(t) = (\sigma \circ c)(t)$ , d.h.  $c$  läuft ganz in  $M$ .  $\square$

Wir wenden den Satz nun auf Strahlen in  $\mathcal{K}$  an, womit wir diese als Geodätische erkennen, ohne Christoffel-Symbole benutzen zu müssen:

**Satz 43.** *Genau die Strahlen und Halbkreise in  $\mathcal{K}$  sind Geodätische von  $H^2$ , passende Parametrisierung vorausgesetzt.*

*Beweis.* Die Spiegelung  $\sigma(x, y) = (2b - x, y)$  an einem Strahl  $S_b = \{x = b\} \subset H^2$  ist Isometrie, denn wegen  $d\sigma(Z^1, Z^2) = (-Z^1, Z^2)$  gilt

$$g_{\sigma(x,y)}(d\sigma X, d\sigma Y) = \frac{1}{y^2} \left\langle \begin{pmatrix} -X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{y^2} \langle X, Y \rangle = g_{(x,y)}(X, Y).$$

Die Fixpunktmenge von  $\sigma$  ist der Strahl  $S_b$ . Also ist  $S_b$  nach dem Satz bei geeigneter Parametrisierung geodätisch.

Die Isometriegruppe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  operiert aber transitiv auf der Menge dieser Kreise und Strahlen, so dass auch alle Kreise Geodätische sind.  $\square$

Wir berechnen noch die Parametrisierung eines geodätischen Strahls. Soll die Geodätische  $c(t) = (b, f(t))$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  parametrisiert sein, so gilt

$$v^2 \equiv \|c'\|^2 = \|(0, f'(t))\|^2 = \frac{1}{(f(t))^2} (f'(t))^2.$$

Differenzierbare Lösungen hiervon sind  $f(t) = ae^{\pm vt}$  mit  $a > 0$ ,

**Satz 44.** Für jedes  $p \in H^2$  ist  $\exp_p$  auf ganz  $H^2$  definiert (jeder Ball ist normal), alle Geodätischen sind Kürzeste, und  $H^2$  ist vollständig.

*Beweis.* Fixiert man einen Punkt  $p \in H^2$ , so bilden diejenigen Elemente von  $\mathcal{K}$ , die  $p$  enthalten, eine Blätterung von  $H^2 \setminus \{p\}$ : Diese Kurven schneiden sich allein in  $p$  und überdecken  $H^2$ . Wie unsere Berechnung der Parametrisierung zeigt, sind diese Geodätischen auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

Statt den allgemeinen Satz “exp global  $\Rightarrow M$  vollständig” zu zitieren, erhalten wir auch mit dem folgenden elementaren Argument die letzte gewünschte Aussage. Jede Cauchyfolge liegt in einer kompakten Menge von  $H^2$ . Dort ist die Abstandsmetrik aber äquivalent zur gewöhnlichen Abstandsmetrik, und daher folgt die Konvergenz der Cauchy-Folge aus der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Aus dieser Argumentation folgt auch, dass es keine orientierungstreuen Isometrien von  $H^2$  über  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  hinaus geben kann: Eine Isometrie bildet Geodätische auf Geodätische ab. Aber Geodätische sind bereits durch Anfangspunkt und -richtung eindeutig bestimmt. Es kann also nur eine Isometrie geben, die  $(p, v) \in TH^2$  auf  $(q, w) \in TH^2$  abbildet (wobei  $v, w$  Einheitsvektoren seien). Eine solche Isometrie ist aber in  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  enthalten, wie wir in Satz 41(iii) bereits gezeigt haben.

*Bemerkung.* Rund zweitausend Jahre lang waren Euklids Axiome die Grundlage der ebenen Geometrie. Diese Axiome beziehen sich auf Punkte und Geraden der (euklidischen) Ebene und sollen sie definieren. Ein Axiom sagt beispielsweise: Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade. Ein anderes besagt: Entfernt man aus einer Geraden einen Punkt, so gibt es Punkte in der Geraden, die nicht verbindbar sind. Das berühmteste Axiom ist: Je zwei Geraden, die nicht parallel sind, schneiden sich in einem Punkt. Diese Aussage wurde zum *Parallelenaxiom* uminterpretiert: Für jede Gerade  $g$  und  $p \notin g$  gibt es genau eine Gerade  $h$  durch  $p$  mit  $h \cap g = \emptyset$ . Nimmt man alle Geodätischen von  $\mathbb{H}^2$  als Geraden, so sieht man, dass es für  $k \in \mathcal{K}$  und  $p \notin k$  viele Elemente  $l \in \mathcal{K}$  gibt mit  $p \in l$  aber  $l \cap k = \emptyset$ .



**6.3. Oberes Halbraum-Modell des hyperbolischen Raums.** Wir betrachten nun die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung der hyperbolischen Ebene, den Raum

$$H^n := \{(p_1, \dots, p_n) : p_n > 0\}, \quad g(X, Y) := \frac{1}{p_n^2} \langle X, Y \rangle$$

Mit Satz 43 können wir zeigen, dass  $H^2$  total geodätisch in  $H^n$  liegt. Wir betrachten zuerst die vertikale Ebene  $E = \{(s, 0, \dots, 0, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \subset H^n$  über der  $x$ -Achse. Dann ist  $\sigma(p_1, \dots, p_n) = (p_1, -p_2, \dots, -p_{n-1}, p_n)$  eine Isometrie, denn  $d\sigma(X) = \sigma(X)$ , so dass  $\langle X, Y \rangle = \langle d\sigma(X), d\sigma(Y) \rangle$ ; ferner lässt  $\sigma$  die letzte Koordinate konstant. Entsprechendes gilt für jede vertikale Ebene, also das Produkt von einer Geraden in  $\mathbb{R}^{n-1}$  mit  $(0, \infty)$ .

Aus Satz 43 erhalten wir:

**Satz 45.** *Geodätische in  $H^n$  sind vertikale Strahlen und in vertikalen Ebenen enthaltene Halbkreise, die die Hyperebene  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  senkrecht schneiden.*

Wir erwähnen abschließend noch einige geometrische Eigenschaften.

Horizontale Geraden in  $H^2$  sind nicht geodätisch. Weil sie aber eine isometrische Translation besitzen, muss ihre geodätische Krümmung konstant sein; tatsächlich ist sie konstant 1. Jede horizontale Geraden wird durch denselben Punkt  $\infty$  kompaktifiziert. Daher entsprechen den horizontalen Geraden im Poincaré-Modell Kreise, denen allen derselbe Randpunkt von  $\mathbb{S}^1 = \partial H^2$  fehlt. Man nennt jede derartige Kurve einen *Horokreis*.

Horizontale Hyperebenen  $E \subset H^3$  sind offenbar isometrisch zu  $\mathbb{R}^{n-1}$ , also “flach”. Ihre Bilder im Poincaré-Modell sind Sphären, die wiederum tangential an  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial H^n$  sind; man nennt sie *Horosphären*.

Für hyperbolische Dreiecke gibt es einfache trigonometrische Formeln, (siehe z.B. [GHL, 3.155, 3.156]). Dabei definieren die drei Ecken eines Dreieck einen total geodätischen zweidimensionalen Unterraum, so dass es reicht den Fall von  $H^2$  zu betrachten. Die Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck ist kleiner als  $\pi$ : Der Winkeldefekt, also die Abweichung der Winkelsumme zu  $\pi$ , entspricht dem Flächeninhalt (Folgerung aus dem Satz von Gauss-Bonnet). Es gibt viele interessante Pflasterungen des  $H^2$ , beispielsweise pflastern reguläre  $k$ -Ecke von einer bestimmten Kantenlänge. Für rechtwinkelige Sechsecke kann man das besonders einfach sehen.

Die Isometriegruppe von  $H^3$  ist  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Um das zu sehen, muss man sich nur klar machen, dass die hyperbolischen Isometrien in Bijektion zu Möbiustransformation des berandenden  $\partial H^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$  stehen. Dies liegt daran, dass jede hyperbolische Isometrie, die den Rand  $\partial H^3$  punktweise fixiert, auch die Endpunkte von Geodätischen fixiert, und damit jede Geodätische als Menge fixiert; damit muss eine solche Isometrie die

Identität sein. Umgekehrt lässt sich Möbiustransformation von  $\partial H^3$  eindeutig fortsetzen auf  $H^3$  (wie?). Diese Argumente gelten entsprechend in jeder Dimension, und ergeben dann, dass die Isometrien von  $H^n$  gerade durch die konformen Abbildungen der kompaktifizierten Hyperebene  $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$  gegeben sind.

Die Cayley-Transformierte bildet  $H^2$  auf  $D$  ab. Wenn man auf  $D$  diejenige Riemannsche Metrik nimmt, für die die Cayley-Transformierte zu einer Isometrie wird, so ist diese Riemannsche Metrik auf  $D$  gerade die Poincaré-Metrik. Wegen der Kreis-/Geradentreue und der Konformität der Cayley-Abbildung sind auch im Poincaré-Modell Geodätische genau diejenigen Kreise oder Geraden, die den Rand  $S^1$  senkrecht treffen. Auf diese Weise erhält man ein etwas symmetrischeres Bild des hyperbolischen Raumes, bei dem alle Randpunkte gleichberechtigt sind. (In der Ausgabe von 2009 des Differentialgeometrie-Buches von Chr. Bär können Sie sehen, wie sich ein Bild von Escher transformiert.)

#### 6.4. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 43** – RECHENAUFGABE ZU MÖBIUSTRANSFORMATIONEN:

- Was ist die Inverse der Cayley-Abbildung  $\eta(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ?
- Sei  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Bestätigen Sie  $\text{Im}(Ai) > 0$ , d.h. der Imaginärteil der Möbiustransformation zu  $A$  ist im Punkt  $i$  positiv.  
(Wegen  $A(\mathbb{R}) \subset S^1$  und  $z \mapsto Az$  bijektiv auf  $\overline{C}$  folgt daraus bereits  $A(H^2) \subset H^2$ .)

**Aufgabe 44** – HYPERBOLISCHE FLÄCHE IN  $\mathbb{R}^3$ :

Zeigen Sie: Die Rotationsfläche der Traktrix ist lokal isometrisch zu  $H^2$  mit der hyperbolischen Metrik.

**Aufgabe 45** – METRIKEN AUF DER OBEREN HALBEBENE:

- Zeigen Sie: Die Kurve  $t \mapsto (0, 1-t) \in H^2$  für  $t \in (0, 1)$  hat unendliche Länge in der hyperbolischen Metrik der oberen Halbebene.
- Zeigen Sie: Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,  $g = \frac{1}{y} \langle \cdot, \cdot \rangle$  ist nicht vollständig.
- Zeigen Sie direkt: Jede Cauchy-Folge in  $H^2$  mit der hyperbolischen Metrik konvergiert.  
*Tipp:* Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge von 0 weg beschränkte  $y$ -Koordinaten hat.

**Aufgabe 46** – HYPERBOLISCHE ISOMETRIEN:

Sei  $\partial H^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $\bar{H}^2 = H^2 \cup \partial H^2$ . Eine Isometrie der abgeschlossenen oberen Halbebene  $\bar{H}^2$  heißt

- hyperbolisch, wenn sie zwei Fixpunkte in  $\partial H^2$  hat;
- elliptisch, wenn sie einen Fixpunkt in  $H^2$  hat;
- parabolisch, wenn sie einen Fixpunkt in  $\partial H^2$  hat.

- a) Sei  $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Überzeugen Sie sich davon, dass  $Tz = z$  eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten ist.

Diskutieren Sie die Lage der Nullstellen und zeigen Sie, dass  $T$  entweder hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist.

- b) Können Sie konkrete Möbiustransformationen angeben, die 0, 1, 2 bzw. 3 Fixpunkte in  $\overline{\mathbb{H}^2}$  besitzen?

**Aufgabe 47** – DISKRETE GRUPPENOPERATION AUF  $\mathbb{H}^2$ :

Sei  $\mathbb{H}^2$  die obere Halbebene. Betrachten Sie die durch  $g(z) = z + 2$  und  $h(z) = \frac{z}{2z+1}$  erzeugte Gruppe  $G$ , sie ist eine Untergruppe der *Modulgruppe*  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $G$  diskret (insbesondere fixpunktfrei) durch Isometrien auf  $\mathbb{H}^2$  operiert. Was folgt daraus?
- b) Beschreiben Sie  $\mathbb{H}^2/G$  geometrisch.

### Teil 3. Krümmung

21. Vorlesung, Dienstag 12.1.10

---

Es sei stets  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  ihr Levi-Civita-Zusammenhang. Wir setzen ferner  $n \geq 2$  voraus.

#### 1. KRÜMMUNGSBEGRIFFE

Was soll unser Krümmungsbegriff leisten? Seine wichtigsten Eigenschaften werden sein:

1. Die Krümmung wird die Gauß-Krümmung auf semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinern. Sie tut es durch Einschränkung der Mannigfaltigkeit auf  $\exp_p$ (Ebene). Dies war 1854 Riemanns wegweisende Idee.
2. Die Krümmung misst die Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung: Die Krümmung verschwindet genau dann, wenn die Parallelverschiebung lokal wegunabhängig ist ("lokal" kann man präzisieren als "für homotope Wege").
3. Die Krümmung ist die einzige Invariante für lokale Isometrien von semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
4. Die Krümmung wird normiert, indem man festlegt: Die drei Mannigfaltigkeiten  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$  haben die Krümmungen  $\kappa = +1, 0, -1$ .

**1.1. Gauß-Krümmung von Flächen.** Weil der Riemannsche Krümmungsbegriff die Gauß-Krümmung verallgemeinert, möchte ich kurz darstellen, wie dieser Krümmungsbegriff definiert werden kann und welche Eigenschaften er hat. Wir geben vier verschiedene Charakterisierungen der Gauß-Krümmung  $K$  an. Dabei sind a), b) extrinsische Definitionen und c), d) geben an, wie die Gauß-Krümmung intrinsisch deutbar ist.

a) Wir betrachten immersierte Flächen  $f: \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wir benutzen die Normalen-Abbildung  $\nu: \Omega^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  (Gauß-Abbildung) der Fläche.

- Beispiele.*
1. Für eine parametrisierte Ebene ist  $\nu$  konstant,
  2. für einen Zylinder liegt  $\nu$  in einem Großkreis,
  3. für  $\mathbb{S}_R^2$  kann man  $\nu = \frac{1}{R}f$  wählen.

Wenn sich  $f$  stark krümmt, wird das Normalenbild groß sein. Eine Möglichkeit, die Größe des Normalenbildes zu messen, ist  $\det d\nu_p$  zu betrachten. Allerdings tut es dies relativ zur gewählten Parametrisierung: Skalieren wir die Fläche in  $\mathbb{R}^3$  beispielsweise mit einem Faktor, so hängt  $\det d\nu_p$  quadratisch von diesem Faktor ab. Um eine von der gewählten Parametrisierung unabhängige Größe zu erhalten, dividieren wir durch  $\det df$ . Entsprechend

hat Gauß definiert:

$$(1) \quad K(p) = \frac{\det d\nu_p}{\det df_p}.$$

(Technisch ist es oft vorteilhaft, die *Weingarten-Abbildung*  $S = (df)^{-1}d\nu$  einzuführen, so dass  $K(p) = \det((df_p)^{-1}d\nu_p)$ ; siehe Vorlesung klassischen Differentialgeometrie.)

*Beispiele.* 1. Für die Ebene  $K \equiv 0$ ,

2. für den lokal isometrischen Zylinder ebenfalls.

3. Für die Sphäre  $\mathbb{S}_R^2$  ist  $K = 1/R^2$ .

b) Man kann auch die zweite Fundamentalform  $b_{ij} := \langle \partial_{ij}f, \nu \rangle$  benutzen, um die Gauß-Krümmung einzuführen. Wir tun dies hier nur für den Spezialfall eines Graphen über der Tangentialebene. Wir nehmen also  $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$  an, wobei  $f(0, 0) = 0$  und  $\text{grad } f(0, 0) = 0$ , bzw.  $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$ . Dann gilt im Ursprung  $b_{ij} = \partial_{ij}^2 h$ , die zweite Fundamentalform ist also die Hesseform der Höhenfunktion,  $b = d^2h$ . Zulässige Isometrien sind hier Bewegungen. Die Invarianten der symmetrischen Bilinearform  $d^2h$  bezüglich Bewegungen sind die Eigenwerte, genannt Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$ . In der entsprechenden Basis von Eigenvektoren hat  $d^2h$  die Diagonalform  $d^2h = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ . Insbesondere ist auch das Produkt der Eigenwerte  $K = \det d^2h = \kappa_1 \kappa_2$  eine Invariante.

Wenn  $f$  allgemein ist, also nicht unbedingt Graph über der Tangentialebene, erhält man einen parametrisierungsinvarianten Ausdruck, indem man setzt

$$(2) \quad K = \frac{\det b}{\det g}.$$

c) In  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  haben Kreise  $\partial B_r$  vom Abstand  $r$  um einen Punkt die Längen  $2\pi \sin r$ ,  $2\pi r$ , bzw.  $2\pi \sinh r$ . Eine Taylorentwicklung führt daher zu der Formel für die Länge  $L$  der Abstandskreise auf,

$$L(\partial B_r) = 2\pi \left( r - \frac{K}{3!} r^3 + O(r^4) \right),$$

wobei  $K$  die Gauß-Krümmung ist. Im Falle variabler Krümmung gibt die entsprechende Formel für  $L(\partial B_r(p))$  die Krümmung  $K(p)$  an.

d) Wir benötigen eine Formel, die  $K(p)$  durch die erste Fundamentalform bzw. Riemannsche Metrik  $g$  und seine Ableitungen bestimmt. Dass es eine solche Formel gibt, ist eine überraschende Tatsache, die nicht aus (1) oder (2) ablesbar ist. Sie ist Inhalt des *theorema egregium* von Gauß. Der Beweis des *theorema egregium* folgt aus längeren Rechnungen, die man wie folgt zusammenfassen kann. Für eine Immersion  $f: \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gilt  $(\partial_{ij} - \partial_{ji})\partial_k f = 0$  nach dem Satz von Schwarz. Indem man diesen Ausdruck als eine Linearkombination seiner Tangentialkomponenten berechnet, gewinnt man für jede Immersion

$f$  eine Gleichung, die sogenannte *Gauß-Gleichung*,

$$(3) \quad R_{ijk}^s := \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^n \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s = \sum_{r=1}^n (b_{jk} b_{ir} - b_{ik} b_{jr}) g^{rs} \quad 1 \leq i, j, k, s \leq n.$$

Die Gauß-Gleichung verknüpft die innere Geometrie (linke Seite) mit der äusseren Geometrie (rechte Seite). Tatsächlich hängen die Christoffel-Symbole ja nur von  $g$  ab, während  $b$  durch  $\nu$  bestimmt ist.

Multiplizieren wir die Gauß-Gleichung mit der Matrix  $g_{st}$  und summieren, so erhalten wir  $\sum_s g_{st} R_{ijk}^s = b_{jk} b_{it} - b_{ik} b_{jt}$  für  $1 \leq i, j, k, t \leq n$ . Im zweidimensionalen Fall,  $n = 2$ , wird die rechte Seite zur Determinante von  $b$ , wenn wir spezifizieren  $i = t = 1$  und  $j = k = 2$ . Es ergibt sich die gewünschte intrinsische Formel für die Gauß-Krümmung,

$$(4) \quad \frac{\sum_{s=1}^2 g_{s1} R_{122}^s}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det b}{\det g} = K,$$

in jedem Punkt  $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Die durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Größen werden wir auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dabei wird (3) zum algebraischen Begriff des Krümmungstensors führen, und (4) zur geometrischen Schnittkrümmung.

**1.2. Krümmungstensor.** Die Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird zunächst durch einen Tensor beschrieben, der drei Vektorfeldern ein neues Vektorfeld zuordnet. Später werden wir daraus einen geometrischen Begriff ableiten, die Schnittkrümmung.

**Definition.** Der Kommutator der zweiten kovarianten Ableitungen

$$(5) \quad R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{V}(M).$$

heißt der (*Riemannsche*) *Krümmungstensor*. Bezüglich einer Karte  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren wir lokale Darstellungen  $R_{ijk}^s: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_s R_{ijk}^s e_s.$$

Man bezeichnet Mannigfaltigkeiten mit identisch verschwindendem Krümmungstensor als *flach*.

Achtung: Die Wahl des umgekehrten Vorzeichens für  $R$  ist ebenfalls üblich!

Der Krümmungstensor erscheint auf den ersten Blick als ein ganz willkürliches Objekt. Dass er in der definierten Form tatsächlich vorkommt, werden wir in späteren Beweise noch sehen, z.B. bei der zweiten Variation. Es wird aber auch unmittelbar daraus einsichtig, dass das Vertauschen von Ableitungen, also das Lemma von Schwarz, ein zentrales Argument der mehrdimensionalen Analysis ist (Übung: wo genau?). Anders als im flachen Fall vertauschen

aber im Riemannschen Fall zweite Ableitungen nicht mehr, und dieser Tatbestand wird jedesmal für das Auftreten des Krümmungstensor verantwortlich sein.

Im Beweis des folgenden Lemmas erkennen wir unsere Definition (5) als die koordinatenfreie Darstellung von (3):

**Lemma 1.** *In einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  habe der Levi-Civita-Zusammenhang bezüglich einer Karte  $(x, U)$  die Christoffel-Symbole  $\Gamma$ . Dann gilt die in (3) links gegebene Darstellung von  $R_{ijk}^s$  durch die Christoffel-Symbole.*

*Beweis.* Die Standardbasis  $(e_i)$  bezüglich einer Karte  $(x, U)$  erfüllt  $[e_i, e_j] = 0$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k \\ &= \nabla_{e_i} \left( \sum_r \Gamma_{jk}^r e_r \right) - \nabla_{e_j} \left( \sum_r \Gamma_{ik}^r e_r \right) \\ &\stackrel{\nabla \text{ derivativ}}{=} \sum_r \left[ (\partial_i \Gamma_{jk}^r) e_r + \Gamma_{jk}^r \sum_s \Gamma_{ir}^s e_s - (\partial_j \Gamma_{ik}^r) e_r - \Gamma_{ik}^r \sum_s \Gamma_{jr}^s e_s \right] \\ &= \sum_s \left[ \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_r \left( \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s \right) \right] e_s \end{aligned}$$

□

Die folgende Eigenschaft ist wichtig, z.B. für Basisdarstellungen:

**Lemma 2.**  $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$  ist  $\mathcal{D}(M)$ -linear in allen drei Einträgen.

Dies ist nicht offensichtlich, denn die  $R(X, Y)Z$  definierenden Ableitungsausdrücke  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  und  $(X, Y, Z) \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z$  sind nicht  $\mathcal{D}(M)$ -linear.

*Beweis.* Die  $\mathbb{R}$ -Linearität, z.B.  $R(U + V, Y)Z = R(U, Y)Z + R(V, Y)Z$ , gilt termweise. Wir zeigen nun die  $\mathcal{D}(M)$ -Linearität. Sei  $f \in \mathcal{D}(M)$ .

- in  $X$ : Unter Verwendung der Formel von Satz I.7(iv) folgt

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y] - (\partial_Y f)X} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - \partial_Y f \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z + \partial_Y f \nabla_X Z = f R(X, Y)Z. \end{aligned}$$

- in  $Y$  genauso.

• in  $Z$ :

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + \partial_Y f Z) \\
 &= f \nabla_X \nabla_Y Z + \underbrace{\partial_X f \nabla_Y Z + \partial_Y f \nabla_X Z}_{\text{symm. in } X, Y} + (\partial_X \partial_Y f) Z. \\
 \implies R(X, Y) fZ &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} fZ \\
 &= f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z + (\partial_{[X, Y]} f) Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - (\partial_{[X, Y]} f) Z \\
 &= f R(X, Y) Z
 \end{aligned}$$

□

## 22. Vorlesung, Mittwoch 13.1.10

---

Lemma 2 sagt, dass  $R$  ein Tensor ist: Der Wert von  $R(X, Y)Z$  im Punkt  $p$  wird allein durch die Werte der Vektorfelder  $X, Y, Z$  im Punkt  $p$  bestimmt. Lokal sieht man das aus

$$R\left(\sum \xi^i e_i, \sum \eta^j e_j\right) \sum \zeta^k e_k \stackrel{\mathcal{D}(M)\text{-Linearität}}{=} \sum \xi^i \eta^j \zeta^k R(e_i, e_j) e_k = \sum \xi^i \eta^j \zeta^k R_{ijk}^s e_s.$$

Wir werden uns mit Tensoren in Satz 10 noch im allgemeinen befassen.

*Bemerkung.* Sind  $X, Y, Z$  Standardbasisfelder  $e_i$  einer Karte, so ist der Krümmungstensor exakt der Kommutator der zweiten Ableitungen  $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ . Indem man noch den Lie-Klammer-Term  $\nabla_{[X, Y]} Z$  hinzufügt, verallgemeinert man diesen Kommutator unter Beibehaltung der Tensor-Eigenschaft auf beliebige Felder  $X, Y, Z$ .

**1.3. Schnittkrümmung.** Wenn wir den Begriff der Schnittkrümmung einführen, werden wir uns  $g(R(X, Y)U, V)$  als einen Krümmungsausdruck vorstellen, der auf den durch  $X, Y$  und  $U, V$  aufgespannten orientierten Ebenen definiert ist. Wir werden folgende formale Eigenschaften benötigen:

**Lemma 3.** (i) Bianchi-Identität:  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

(ii)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

(iii)  $g(R(X, Y)U, V) = -g(R(X, Y)V, U)$

(iv)  $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)$

Die Eigenschaften (ii) – (iv) kann man als Orientierungswechsel der Ebenen bzw. Ebenen-tausch verstehen.



*Beweis.* (i) Laut Jacobi-Identität, Satz I,12, ist  $0 = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$ . In dieser zyklischen Summe ersetzen wir nun die Lie-Klammern gemäß  $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]] = \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Bei (\*) haben wir die insgesamt 9 Terme nur umgruppiert.

(ii) Nach Definition von  $R$  klar.

(iii) Auch  $(X, Y, U, V) \mapsto g(R(X, Y)U, V)$  ist  $\mathcal{D}(M)$ -linear. Daher reicht es, die Behauptung lokal für Vektoren der Standardbasis nachzuweisen. Daraus folgt sie allgemein, denn wir können aufsummieren, z.B.  $g(R(\sum_i \xi^i e_i, Y)U, V) = \sum_i \xi^i g(R(e_i, Y)U, V)$ . Machen Sie sich dies klar! Wir schreiben weiterhin  $X, Y, U, V$  für die Vektoren der Standardbasis und werden allein benutzen, dass alle Lie-Klammern verschwinden (\*).

Zunächst: Ist  $b$  irgendeine Bilinearform, so gilt

$$b(Z, Z) = 0 \quad \forall Z \quad \iff \quad b(X, Y) = -b(Y, X) \quad \forall X, Y \quad (\text{Schiefsymmetrie}).$$

Dabei ist “ $\Leftarrow$ ” klar, während “ $\Rightarrow$ ” aus der Parallelogrammgleichung folgt oder aus

$$b(X, Y) + b(Y, X) = b(X + Y, X + Y) - b(X, X) - b(Y, Y).$$

Also reicht es, zu zeigen  $g(R(X, Y)U, U) = 0$ . Wir leiten dies her, indem wir zuerst die Verträglichkeitsbedingung von  $\nabla$  mit  $g$  verwenden:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y U, U) &= \underbrace{\partial_X g(\nabla_Y U, U)}_{\frac{1}{2} \partial_Y g(U, U)} - \underbrace{g(\nabla_Y U, \nabla_X U)}_{\text{symm. in } X, Y} \\ \implies 2g(R(X, Y)U, U) &\stackrel{(*)}{=} \partial_X \partial_Y g(U, U) - \partial_Y \partial_X g(U, U) \stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

(iv) Wir addieren die vier zyklischen Gleichungen, die wir aus (i) erhalten:

$$\begin{aligned} g(R(W, X)Y, Z) + \underline{g(R(X, Y)W, Z)} + g(R(Y, W)X, Z) &= 0 \\ \underline{g(R(X, Y)Z, W)} + g(R(Y, Z)X, W) + \underbrace{g(R(Z, X)Y, W)}_{-g(R(X, Z)Y, W)} &= 0 \\ \dots + \dots + \underbrace{g(R(W, Y)Z, X)}_{g(R(Y, W)X, Z)} &= 0 \\ \dots + \dots + \underbrace{g(R(X, Z)W, Y)}_{-g(R(X, Z)Y, W)} &= 0. \end{aligned}$$

Nach (iii) heben sich die ersten beiden Spalten zyklisch in Paaren weg wie unterstrichen. In der dritten Spalte haben wir mit (ii)(iii) umgeformt. Das ergibt die gewünschte Summe

$$2g(R(Y, W)X, Z) - 2g(R(X, Z)Y, W) = 0. \quad \square$$

Sämtliche Information über  $R$  steckt bereits in  $g(R(X, Y)Y, X)$ , und zwar punktweise:

**Satz 4.** Sei  $g: (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform und die trilineare Abbildung  $R: (\mathbb{R}^n)^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfülle die vier Eigenschaften aus Lemma 3. Dann ist  $R(X, Y)Z$  bereits eindeutig durch  $g(R(X, Y)Y, X)$  bestimmt.

*Beweis.* Wir nehmen an

$$g(R'(X, Y)Y, X) = g(R(X, Y)Y, X) \quad \text{für alle } X, Y$$

und müssen  $R(X, Y)W = R'(X, Y)W$  für alle  $X, Y, W$  zeigen.

Zunächst ist  $g(R(X, Y)Y, Z) \stackrel{(ii)(iii)}{=} g(R(Y, X)Z, Y) \stackrel{(iv)}{=} g(R(Z, Y)Y, X)$ . Das benutzen wir, um in der folgenden Formel den unterstrichenen Term zu erhalten:

$$\begin{aligned} g(R(X + Z, Y)Y, X + Z) &= g(R(X, Y)Y, X + Z) + g(R(Z, Y)Y, X + Z) \\ &= g(R(X, Y)Y, X) + \underline{2g(R(X, Y)Y, Z)} + g(R(Z, Y)Y, Z). \end{aligned}$$

Das gleiche gilt für  $R'$ , wobei nach Annahme die linke Seite und die beiden rechts nicht unterstrichenen Terme übereinstimmen. Also muss auch der unterstrichene Term für  $R$  und  $R'$  jeweils übereinstimmen. Daher gilt bereits

$$(6) \quad g(R(X, Y)Y, Z) = g(R'(X, Y)Y, Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z.$$

Hieraus folgt  $g(R(X, Y + W)(Y + W), Z) = g(R'(X, Y + W)(Y + W), Z)$ . Subtrahieren wir davon laut (6) gleiche Summanden, so verbleibt

$$(7) \quad \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} g(R(X, Y)W, Z) + g(R(X, W)Y, Z) = g(R'(X, Y)W, Z) + g(R'(X, W)Y, Z) \\ g(R(X, Y)W, Z) - g(R'(X, Y)W, Z) = g(R(W, X)Y, Z) - g(R'(W, X)Y, Z).$$

Für jedes  $Z$  bleibt also die Differenz, die auf beiden Seiten von (7) auftritt, gleich unter zyklischer Vertauschung der  $X, Y, W$ .

Wegen der Bianchi-Identität ist weiter

$$\begin{aligned} 0 &= g(\text{Bianchi}(X, Y, W), Z) - g(\text{Bianchi}'(X, Y, W), Z) \\ &\stackrel{(7)}{=} 3g(R(X, Y)W, Z) - 3g(R'(X, Y)W, Z). \end{aligned}$$

Weil dies für alle  $Z$  gilt, folgt  $R(X, Y)W = R'(X, Y)W$  gemäß Lemma II.14. □

Wir verallgemeinern nun die Gauß-Krümmung (4). Dabei spezialisieren wir einfach auf Ebenen des Tangentialraumes. Ein Paar Vektoren  $X, Y$  heißen *nicht ausgeartet*, wenn gilt  $\|X\|_p^2 \|Y\|_p^2 - g_p(X, Y)^2 \neq 0$ . Im Riemannschen Fall sind linear unabhängige Vektoren nicht ausgeartet.

**Definition.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit  $\dim M \geq 2$ ). Für  $p \in M$  und ein nicht-ausgeartetes Paar  $X, Y \in T_p M$  ist die *Schnittkrümmung*

$$(8) \quad K_p(X, Y) := \frac{g_p(R_p(X, Y)Y, X)}{\|X\|_p^2 \|Y\|_p^2 - g_p(X, Y)^2}.$$

Der Nenner gibt den Riemannschen Inhalt des von  $X$  und  $Y$  aufgespannten Parallelogramms an. Er übernimmt nur die Rolle einer Normalisierung, so dass die zweite Behauptung des folgenden Satzes gilt:

**Satz 5.** (i) Die Schnittkrümmung bestimmt den Krümmungstensor.

(ii)  $K_p(X, Y)$  hängt nur von der durch  $X, Y$  aufgespannten Ebene  $\sigma \subset T_p M$  (dem Schnitt) ab.

(iii) Ist  $\dim M = 2$  und  $M$  Riemannsch, so stimmt  $p \mapsto K_p(X, Y)$  für beliebige linear unabhängige Vektoren  $X, Y \in T_p M$  mit der Gauß-Krümmung  $K(p)$  überein.

Wegen (ii) schreiben wir auch  $K(\sigma)$  oder  $K_p(\sigma)$ .

*Beweis.* (i) Hatten wir bereits durch Satz 4 gezeigt.

(ii) Jede Basistransformation von  $\sigma$ , gegeben durch  $(X, Y) \mapsto (X', Y')$ , wird erzeugt durch:

a)  $(X, Y) \mapsto (Y, X)$

b)  $(X, Y) \mapsto (X + Y, Y)$

c)  $(X, Y) \mapsto (\lambda X, Y)$  mit  $\lambda \neq 0$

Zähler und Nenner von (8) bleiben unter (a) invariant, und werden unter (c) beide mit  $\lambda^2$  multipliziert. Wegen  $R(Y, Y)Z = 0$  nach Lemma 3(ii) bleibt unter (b) der Zähler invariant, und ebenso der Nenner. Also ist  $K_p(X, Y) = K_p(X', Y')$ .

(iii) Nach (ii) hängt  $K_p(X, Y)$  nicht von der Wahl von  $X, Y$  ab. Setzen wir speziell  $X := e_1$  und  $Y := e_2$ , so erhalten wir in  $p$

$$K(e_1, e_2) = \frac{g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)}{\|e_1\|^2 \|e_2\|^2 - g^2(e_1, e_2)} = \frac{g(R_{122}^1 e_1 + R_{122}^2 e_2, e_1)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{g_{11}R_{122}^1 + g_{21}R_{122}^2}{\det g} \stackrel{(4)}{=} K$$

□

*Bemerkung.* Die komplex-projektiven Räume  $\mathbb{C}P^n$  sind interessante Riemannsche Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkrümmung genau das Intervall  $[\frac{1}{4}, 1]$  annimmt. Im semi-Riemannschen Fall (mit Index  $1 \leq k \leq n-1$ ) sind solche Beispiele unmöglich, denn eine untere oder obere Schranke

an die Schnittkrümmung impliziert bereits, dass die Schnittkrümmung konstant ist (siehe [ON, Prop. 8.28]).

23. Vorlesung, Dienstag 19.1.10

---

#### 1.4. Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung.

**Definition.** (i) Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  hat *konstante Krümmung*, wenn es ein  $\kappa \in \mathbb{R}$  gibt mit  $K_p(\sigma) = \kappa$  für alle  $p \in M$  und alle Ebenen  $\sigma \subset T_p M$ . Falls  $\kappa \equiv 0$  heißt  $M$  *flach*.

(ii) Eine vollständige Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung heißt *Raumform*.

(iii) Ist  $K_p(\sigma) <, > 0$  für alle  $p \in M$  und Ebenen  $\sigma \subset T_p M$ , so sagt man  $M$  hat *negative, positive* Krümmung.

Nach Satz 4 ist konstante Krümmung  $\kappa = 0$  äquivalent zur Flachheit  $R \equiv 0$ . Der Raum  $\mathbb{R}^n$  und lokal isometrische Räume wie  $T^n$  sind Beispiele.

**Satz 6.**  $M$  hat genau dann konstante Krümmung  $\kappa$ , wenn gilt

$$(9) \quad R_p(X, Y)Z = \kappa (g_p(Y, Z)X - g_p(X, Z)Y) \quad \text{für alle } p \in M \text{ und } X, Y, Z \in T_p M.$$

Diese Formel gilt immer in Dimension  $\dim M = 2$ , sofern man  $\kappa$  durch die Gauss-Krümmung  $K(p)$  ersetzt.

*Beweis.* “ $\Leftarrow$ ” Aus (9) folgt

$$g(R(X, Y)Y, X) = g(\kappa g(Y, Y)X, X) - g(\kappa g(X, Y)Y, X) = \kappa(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X, Y)^2)$$

und damit  $K(X, Y) = \kappa$ , d.h.  $M$  hat konstante Krümmung.

“ $\Rightarrow$ ”  $M$  habe konstante Krümmung  $\kappa$ , d.h. es gilt

$$g(R(X, Y)Y, X) = \kappa(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X, Y)^2).$$

Diese Formel gilt auch in Dimension 2.

Die rechte Seite von (9), bzw.

$$(X, Y, U, V) \mapsto \kappa(g(Y, U)g(X, V) - g(X, U)g(Y, V))$$

erfüllt die vier Eigenschaften von Lemma 3. Tatsächlich ergibt die rechte Seite von (9) sechs Terme in (i), die sich paarweise wegheben, und (ii)-(iv) sind leicht zu sehen. Laut Satz 4 folgt daraus bereits, dass der Krümmungstensor mit dem Tensor für konstante Krümmung übereinstimmt.  $\square$

Zwar gilt der Beweis auch, wenn  $K_p(\sigma)$  nur von  $p$ , nicht aber von  $\sigma$  abhängt. Das ist in  $\dim M = 2$  auch der Fall für jede Fläche, deren Gauß-Krümmung nicht konstant ist. Allerdings sagt für  $\dim M \geq 3$  ein Satz von Schur (siehe Übungen): Ist  $K_p$  unabhängig von  $\sigma$ , so ist  $p \mapsto K_p$  bereits konstant.

Im Riemannschen Falle haben folgende Mannigfaltigkeiten konstante Krümmung:

**Satz 7.**  $\mathbb{S}^n$  hat konstante Krümmung 1, ebenso Quotienten unter diskreter Gruppenoperation wie  $\mathbb{R}P^n$ .

*Beweis.* Seien  $p, q \in \mathbb{S}^n$  und  $\sigma$  Ebene in  $T_p\mathbb{S}^n$  und  $\tau$  Ebene in  $T_q\mathbb{S}^n$ . Dann gibt es eine Isometrie  $\varphi \in \mathbf{O}(n+1)$  mit  $\varphi(p) = q$  und  $d\varphi(\sigma) = \tau$ . (Tatsächlich gibt es sogar für jedes Paar von Orthonormalbasen in  $T_p\mathbb{S}^n, T_q\mathbb{S}^n$  eine Isometrie, die die Vektoren paarweise aufeinander abbildet.) Nun ist die Schnittkrümmung  $K_p(\sigma)$  invariant unter Isometrien. Also hat  $\mathbb{S}^n$  konstante Krümmung  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Wir benutzen nun, dass  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  die Schnittkrümmung 1 hat. Das folgt entweder durch Anwendung des theorema egregium, oder indem man Christoffel-Symbole für die stereographische Projektion berechnet.

Sei  $\sigma \subset T_p\mathbb{S}^n$  eine Ebene. Der Untervektorraum  $U := \text{span}(p, \sigma)$  hat Dimension 3. Daher ist  $S := U \cap \mathbb{S}^n$  isometrisch zur 2-Sphäre und hat die konstante Schnittkrümmung 1. Also gilt nach (9) für je drei Vektoren  $X, Y, Z$ , die  $T_pS$  aufspannen,

$$R_p^S(X, Y)Z = g^S(Y, Z)X - g^S(X, Z)Y.$$

Wir behaupten nun, dass beide Seiten erhalten bleiben, wenn  $g, R$  bezüglich  $\mathbb{S}^n$  gebildet werden. Aus Satz 6 folgt dann  $\kappa = 1$ .

Weil die Inklusion  $S \subset \mathbb{S}^n$  isometrisch ist, bleibt die rechte Seite unverändert. Für die linke Seite beachten wir, dass auf der Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die kovariante Ableitung  $\nabla_X^{\mathbb{S}^n} Y$  als Tangentialanteil definiert ist:

$$(10) \quad \nabla_X^{\mathbb{S}^n} Y = (\partial_X Y)^\top = \partial_X Y - \langle \partial_X Y, p \rangle p.$$

Nun ist die Normale  $p$  sowohl die Normale von  $\mathbb{S}^n$  als auch die Normale an  $S \subset U$ . Also gilt dieselbe Formel für  $S$  wie für  $\mathbb{S}^n$ ; das gleiche gilt für die zweiten kovarianten Ableitungen und die Lie-Klammer, die  $R$  definieren.  $\square$

Ähnlich kann man auch für den hyperbolischen Raum argumentieren. Durch Berechnen der Christoffelsymbole zeigt man, dass  $\mathbb{H}^2$  Krümmung  $-1$  hat. Weiterhin hat  $\mathbb{H}^n$  konstante Krümmung, da die Isometriegruppe transitiv auf Ebenen ist. Es reicht also die Krümmung von  $\mathbb{H}^n$  für eine Ebene zu bestimmen. Nehmen wir einen Unterraum  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ , der tangential an diese Ebene ist, so behaupten wir, dass dessen Schnittkrümmung  $-1$

auch die Schnittkrümmung von  $\mathbb{H}^n$  ist. Das liegt daran, dass ganz allgemein für eine total geodätische Untermannigfaltigkeit  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $N$  gilt  $\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y$  für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  (siehe z.B. Prop.13 auf p.104 von O'Neill).

*Bemerkung.* Im semi-Riemannschen Fall (mit Index  $1 \leq k \leq n - 1$ ) sind Pseudosphären und pseudohyperbolische Räume Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung.

**1.5. Geometrische Eigenschaften des Krümmungstensors.** Wir geben hier zwei anschauliche Eigenschaften des Krümmungstensors an.

a) Der Krümmungstensor ist ein infinitesimales Maß der Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung. Um dies zu präzisieren, betrachten wir  $p \in M$  und  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ . Es sei weiterhin  $f$  eine auf einer Umgebung  $U$  von  $0 \in \mathbb{R}^2$  erklärte Abbildung mit Werten in  $M$ , so dass  $f(0) = p$  und  $\frac{\partial f}{\partial x}|_p = X(p)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}|_p = Y(p)$ . Wir betrachten nun das Bild eines in  $U$  enthaltenen kleinen Rechtecks  $\square_{s,t}$ ; es soll die linke untere Ecke in 0 haben, sowie Kantenlängen  $s$  in  $x$ -Richtung und  $t$  in  $y$ -Richtung.

Wir nehmen nun den Vektor  $Z(p)$  und verschieben ihn parallel längs des Randes von  $f(\square_{s,t})$ ; genauer gesagt machen wir dies nacheinander entlang der vier glatten Seiten des Bild-Rechtecks. Das Ergebnis dieser Parallelverschiebung sei der Vektor  $Z(s, t) \in T_p M$ .

**Satz 8.** *Es gilt*

$$(11) \quad R(X, Y)Z = \lim_{(s,t) \rightarrow 0} \frac{Z(s, t) - Z(p)}{st}.$$

Gilt also  $R_p(X, Y)Z \neq 0$ , so führt die Parallelverschiebung von  $Z$  längs eines geeignet kleinen Rechtecks  $\square_{s,t}$  tatsächlich zu einem von  $Z$  verschiedenen Vektor; sie ist insbesondere wegabhängig.

Die Umkehrung, dass die Parallelverschiebung für Mannigfaltigkeiten mit  $R \equiv 0$  weg-unabhängig ist, werden wir erst aus dem nächsten Satz folgern können.

*Beweisidee.* Man setzt  $Z(p)$  fort zu einem Feld  $\tilde{Z}$ , so dass

$$\tilde{Z}(p) = Z(p), \quad t \mapsto \tilde{Z}_{f(0,t)} \text{ parallel,} \quad s \mapsto \tilde{Z}_{f(s,t)} \text{ parallel.}$$

Wegen Parallelität und Kartenfeldern gilt dann  $R_p(X, Y)Z = (\nabla_{e_x} \nabla_{e_y} \tilde{Z})(p)$ . Man kann die Behauptung nun zeigen, indem man die beiden kovarianten Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, wie wir dies in dem Satz in II,11 gezeigt haben. Wir lassen die längere Rechnung aus.  $\square$

b) Die Krümmung ist die einzige lokale Isometrie-Invariante einer Mannigfaltigkeit. Wenn die Krümmungen zweier Mannigfaltigkeiten in der Umgebung eines Punktes übereinstimmen, so sind die Mannigfaltigkeiten lokal isometrisch. Dabei vergleicht man die Krümmungen, indem man bezüglich eines festen Punktepaars  $p \in M^n$ ,  $q \in N^n$  die lokal definierte Abbildung  $\exp_q \circ \exp_p^{-1}$  betrachtet, wobei Vektorfelder mittels Parallelverschiebung nach  $T_pM = T_qM = (\mathbb{R}^n, \delta)$  zurückbefördert werden.

Ein einfacherer Fall ist natürlich, sich auf Räume konstanter Krümmung zu beschränken, siehe z.B. [GHL, Thm.3.82]. Wir wollen hier sogar allein den flachen Fall behandeln:

**Satz 9.** *Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsch mit Krümmungstensor  $R \equiv 0$ . Dann ist  $M$  lokal isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ .*

*Beweis.* Wir gehen ähnlich wie im letzten Beweis vor. Sei  $p \in M^n$  und  $(x, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p = x^{-1}(0)$  mit Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  und  $k$  der Index von  $g$ . Wir werden eine neue Karte definieren, indem wir die Integralkurven von  $n$  Vektorfeldern betrachten, die wir durch Parallelverschiebung aus einer Orthonormalbasis in  $p$  gewinnen. Sei dazu  $X_i(p)$  eine Orthonormalbasis.

Wir setzen  $X_1$  durch Parallelverschiebung fort auf Punkte der Form  $x^{-1}(u^1, 0, \dots, 0)$ ; diese Fortsetzung benutzend, erweitern wir  $X_1$  dann durch Parallelverschiebung auf Punkte der Form  $x^{-1}(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ . Dabei arbeiten wir in einer geeignet kleinen Umgebung von  $u = 0$ . Nach Voraussetzung gilt dann

$$0 \stackrel{\text{Vor.}}{=} R(e_1, e_2)X_1 \stackrel{e_1, e_2 \text{ Kartenfelder}}{=} \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} X_1 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} X_1 \stackrel{X_1 \text{ parallel}}{=} -\nabla_{e_2} \nabla_{e_1} X_1.$$

Also ist das Vektorfeld  $\nabla_{e_1} X_1$  parallel längs der Kurven  $t \mapsto x^{-1}(u^1, t, 0, \dots, 0)$ . Aber dieses Vektorfeld verschwindet jeweils im Punkt  $x^{-1}(u^1, 0, \dots, 0)$ . Damit verschwindet  $\nabla_{e_1} X_1$  in allen Punkten  $x^{-1}(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ , d.h.  $X_1$  ist auch parallel entlang der Kurven  $u^1 \mapsto x^{-1}(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ .

Durch Induktion gewinnt man auf die gleiche Weise eine Fortsetzung von  $X_1$  auf eine ganze Umgebung von  $p$ , so dass  $\nabla_{e_i} X_1 \equiv 0$  für alle  $i$ . Also ist  $X_1$  sogar parallel entlang jeder Kurve.

Das gleiche Argument funktioniert auch für jedes der Felder  $X_2, \dots, X_n$ . Also gilt für den Levi-Civita-Zusammenhang

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i \stackrel{X_i, X_j \text{ parallel}}{=} 0.$$

Daher kommutieren die Flüsse dieser Felder und wir können eine Karte  $y$  um  $p$  definieren, indem wir setzen  $y^{-1}(u^1, \dots, u^n) := \varphi_{u^1}(\dots(\varphi_{u^n}(p))\dots)$ . Wegen des Kommutierens der  $X_i$  hat diese Karte die Standardbasis  $X_1, \dots, X_n$  (siehe Vorlesung Mannigfaltigkeiten).

Wir behaupten, dass  $y$  eine lokale Isometrie von  $M$  nach  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$  darstellt. Im Punkt  $p$  erfüllen diese Felder

$$(12) \quad g(X_i, X_j) = \pm \delta_{ij},$$

mit  $+$  für die ersten  $n - k$  Indices  $i = j$ . Aber für parallele Felder  $(X_i)$  bleibt  $g(X_i, X_j)$  konstant (Satz II 12). Also ist  $y$  Isometrie.  $\square$

## 24. Vorlesung, Mittwoch 20.1.10 (mit Korrekturen und Erweiterungen) \_\_\_\_\_

**1.6. Tensorfelder.** a) *Multilineare Algebra:* Es seien  $r, s \geq 0$ . Weiter sei  $V$  ein Vektorraum und  $V^*$  sein Dualraum. Elemente von  $V^*$  bezeichnen wir als Kovektoren. Dann heißt eine Abbildung  $A: (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $(r, s)$ -Tensor, wenn sie  $\mathbb{R}$ -linear in jedem Argument ist. Man sagt auch  $A$  ist *multilinear*.

*Beispiele.* 1. Eine Bilinearform  $(v, w) \mapsto b(v, w)$  ist  $(0, 2)$ -Tensor.

2. Die Determinante  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$  ist ein  $(0, n)$ -Tensor; allgemeiner ist jede  $k$ -Form  $\omega$  ein  $(0, k)$ -Tensor.

3. Die Auswertung  $(w^*, v) \mapsto w^*(v)$  ist  $(1, 1)$ -Tensor.

4. Eine reelle Zahl betrachten wir als einen  $(0, 0)$ -Tensor.

*Bemerkungen.* 1. Basisdarstellungen wie  $b(v_1, v_2) = \sum_{ij} b_{ij} v_1^i v_2^j$  kann man auch für beliebige Tensoren angeben. Sei  $(e_i)$  eine Basis von  $V$  und  $(e^j)$  eine Basis von  $V^*$ . Schreiben wir jedes  $v \in V$  und  $w \in V^*$  als Linearkombination, z.B.  $v = \sum v^i e_i$ , so erhalten wir allein unter Benutzung der Multilinearität für einen  $(r, s)$ -Tensor  $T$  die Darstellung

$$\begin{aligned} T(w^1, \dots, w^r, v_1, \dots, v_s) &= T\left(\sum w_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \sum v_{j_s}^{j_s} e_{j_s}\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T(e^{i_1} \dots e^{i_r}, e_{j_1} \dots e_{j_s}) w_{i_1}^1 \dots w_{i_r}^r v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_s}^{j_s} =: \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} w_{i_1}^1 \dots w_{i_r}^r v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_s}^{j_s}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten termweise durch Gleichheit definiert sind. Aus der Anzahl der Koeffizienten sieht man sofort, dass die Dimension des Raums der  $(r, s)$ -Tensoren gerade  $\dim V^{r+s}$  ist. Für alle Rechenregeln von Tensoren ist es am besten, sich einen Tensor stets als diese Summe von Produkten vorzustellen.

2. Das *Tensorprodukt*  $\otimes$  ist eine Operation, die aus einem  $(r, s)$ -Tensor  $T$  und einem  $(r', s')$ -Tensor  $T'$  den  $(r + r', s + s')$ -Tensor  $T \otimes T'$  macht. Dies ist einfach durch das Produkt von  $T(\dots)T'(\dots)$  gegeben. Man sieht schnell, dass es ebenfalls multilinear ist.

3. Die *Kontraktion* macht aus einem  $(r, s)$ -Tensor  $T$  einen  $(r - 1, s - 1)$ -Tensor  $c_j^i T$ , wobei  $1 \leq i \leq r$  und  $1 \leq j \leq s$  beliebig gewählt werden können. Man wählt hierzu als Basis von



$V^*$  die duale Basis, es soll also  $e^k(e_i) = \delta_i^k$  gelten. Dann setzt man statt des  $i$ -ten Kovektors bzw.  $j$ -ten Vektors gerade  $e^k$  bzw.  $e_k$  ein und summiert:

$$c_j^i T(w^1 \dots w^{r-1}, v_1 \dots v_{s-1}) := \sum_k T(w^1 \dots w^{i-1}, e^k, w^i \dots w^{r-1}, v_1 \dots v_{j-1}, e_k, v_j \dots v_{s-1})$$

Man kann zeigen, dass dies von der gewählten Basis unabhängig ist (Übung). Offenbar hat  $c_j^i T$  gerade die Koeffizienten

$$(c_j^i T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^n T_{j_1 \dots j_{j-1} k j_{j+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{i-1} k i_{i+1} \dots i_r}.$$

Über den  $i$ -ten oberen und den  $j$ -ten unteren Index wird also summiert.

4. Vektoren  $v \in V$  lassen sich als  $(1, 0)$ -Tensor  $T$  deuten, d.h.  $V \cong \{(1, 0)\text{-Tensoren}\}$ . Gegeben  $v \in V$ , muss man jedem  $w^*$  in  $V^*$  eine reelle Zahl zuordnen. Dies tut man durch

$$(13) \quad w^* \mapsto T(w^*) := w^*(v).$$

Jeden  $(1, 0)$ -Tensor  $T$  kann man so erhalten (Übung). Entsprechend kann man auch jeden  $(1, s)$ -Tensor mit einer Abbildung  $V^s \rightarrow V$  identifizieren (wie?).

b) *Tensorfelder*. Lässt man Vektoren von Fußpunkten abhängen, so erhält man Vektorfelder. Ebenso gewinnen wir aus Tensoren nun Tensorfelder:

**Definition.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein  $(r, s)$ -Tensorfeld  $T$  ist eine Abbildung

$$T: (\mathcal{V}(M)^*)^r \times \mathcal{V}(M)^s \rightarrow \mathcal{D}(M),$$

die in jedem Eintrag  $\mathcal{D}(M)$ -linear ist. Ein  $(0, 0)$ -Tensorfeld ist eine Funktion in  $\mathcal{D}(M)$ .

Ein Tensorfeld macht also aus  $s$  Vektorfeldern und  $r$  Dualvektorfeldern (Formen) eine Funktion. In den meisten Beispielen ist Additivität und  $\mathbb{R}$ -Linearität klar; die entscheidende Eigenschaft ist, dass man Funktionen aus  $T$  herausziehen kann.

*Beispiele.* (i) Die semi-Riemannsche Metrik oder der *metrische Tensor*  $g(X, Y)$  ist  $(0, 2)$ -Tensorfeld.

(ii)  $g(R(W, X)Y, Z)$  ist  $(0, 4)$ -Tensorfeld.

(iii) Ein Vektorfeld  $X$  lässt sich wie in (13) einem  $(1, 0)$ -Tensorfeld  $T(\omega)$  identifizieren,  $T(\omega) := \omega(X)$ .

(iv) Der Krümmungstensor  $R$  ist eine trilineare Abbildung  $\mathcal{V}(M)^3 \rightarrow \mathcal{V}(M)$ . Im Sinne von Bemerkung 4 oben können wir ihn mit einem  $(1, 3)$ -Tensorfeld  $\tilde{R}$  identifizieren, indem wir setzen  $\tilde{R}(\omega, X, Y, Z) := \omega(R(X, Y)Z)$  für alle  $\omega \in \mathcal{V}(M)^*$ .

(v) Dagegen ist die kovariante Ableitung  $(X, Y, Z) \mapsto g(\nabla_X Y, Z)$  kein  $(0, 3)$ -Tensorfeld; jedoch ist für jedes feste  $Y$  die Abbildung  $(X, Z) \mapsto g(\nabla_X Y, Z)$  ein  $(0, 2)$ -Tensorfeld.

Wie Bemerkung 4 und Beispiele (iii),(iv) nahelegen, kann man jeden  $(r, s)$ -Tensor  $T$  mit einer multilinearen Abbildung  $\tilde{T}: \mathcal{V}(M)^s \rightarrow \mathcal{V}(M)^r$  identifizieren.

Anders als für Derivationen gilt:

**Satz 10.** *Ist  $T$  Tensorfeld, so hängt der Wert  $T_p(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)$  nur ab von den Werten der Argumente in  $p$ , d.h. von  $\omega_p^1, \dots, \omega_p^r, X_1(p), \dots, X_s(p)$ .*

Eine wichtige Konsequenz ist, dass man für Tensorfelder genau die gleiche Basisdarstellung wie für Tensoren hat, allein, dass Koeffizienten sowie Vektoren und Kovektoren nun vom Fußpunkt abhängen:

$$T_p(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \omega_{i_1}^1(p) \cdots \omega_{i_r}^r(p) X_1^{j_1}(p) \cdots X_s^{j_s}(p)$$

Tatsächlich braucht man nur die  $\mathcal{D}(M)$ -Multilinearität benutzen, um diese lokale Darstellung genauso herzuleiten, wie wir es für Tensoren gemacht haben.

*Beweis.* Wir zeigen dies für einen  $(0, 1)$ -Tensor, der allgemeine Fall geht genauso. Dann ist zu zeigen  $T_p(X) = T_p(Y)$  für zwei Vektorfelder  $X, Y$  mit  $X(p) = Y(p)$ .

Es sei  $(x, U)$  eine Karte um  $p$  und Standardbasis  $e_i$ . Für die lokalen Darstellungen  $X = \sum_i \xi^i e_i$  und  $Y = \sum_i \eta^i e_i$  gilt  $\eta^i(p) = \xi^i(p)$  für alle  $i$ . Die  $\mathcal{D}(M)$ -Linearität würde ergeben

$$(14) \quad T_p X = T_p \left( \sum_i \xi^i e_i \right) = \sum_i \xi^i(p) T_p e_i = \sum_i \eta^i(p) T_p e_i = T_p Y.$$

Jedoch sind  $\eta^i, \xi^i$  und die  $e_i$  nur auf  $U$ , nicht auf  $M$ , definiert, so dass wir die  $\mathcal{D}(M)$ -Linearität nicht direkt benutzen können.

Durch Multiplikation mit einer Hutfunktion  $f$  erreichen wir aber das gleiche Resultat. Dazu habe  $f \in \mathcal{D}(M)$  kompaktem Träger in  $U$  und es sei  $f(p) = 1$ . Durch Fortsetzung mit 0 erhalten wir dann Funktionen, die  $f\xi^i, f\eta^i \in \mathcal{D}(M)$  und  $f e_i \in \mathcal{V}(M)$ , mit denen wir nun die lokal definierten Ausdrücke  $\xi^i, \eta^i, e_i$  in (14) ersetzen können; wegen  $f(p) = 1$  folgt dasselbe Resultat.  $\square$

Wir erklären noch die Bezeichnungen *kovariant* und *kontravariant*. Diese Bezeichnungen beziehen sich auf das Transformationsverhalten unter Kartenwechseln. Betrachten wir zwei Karten  $(x, U)$  und  $(y, U)$  um  $p$ , mit Koordinatentransformation

$$(15) \quad y \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(U).$$

Per definitionem transformieren sich Tangentialvektoren mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels. Sei  $e_i$  die Standardbasis von  $x$  und  $f_i$  die von  $y$ , und  $X$  habe die Darstellungen

$X = \sum_i \xi^i e_i = \sum_j \eta^j f_j$ , so gilt

$$(16) \quad \eta = d(y \circ x^{-1})\xi \quad \text{bzw.} \quad \eta^j = \sum_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \xi^i,$$

wobei wir rechts die Kurzschreibweise  $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} := \frac{(y \circ x^{-1})^j}{\partial u^i}$  verwendet haben. Die Kovarianz besteht darin, dass die Koordinatentransformationen (15) und (16) in die gleiche Richtung gehen, also  $y \circ x^{-1}$  enthalten.

Betrachten wir dagegen den kontravarianten Fall: Ein Kovektor, also eine 1-Form, habe die Basis-Darstellungen  $\omega = \sum_i a_i e^i = \sum_j b_j f^j$ , wobei  $e^i = dx^i$  bzw.  $f^j = dy^j$  die dualen Basen zu den Kartenfeldern sind. Setzen wir nun die beiden lokalen Darstellungen von  $X$  ein, so folgt

$$\omega(X) = \sum_{ij} a_i e^i(\xi^j e_j) = \sum_{ij} a_i \xi^j \delta_i^j = \sum_i a_i \xi^i \stackrel{\text{analog}}{=} \sum_i b_i \eta^i.$$

In Vektorschreibweise lautet das  $a^t \xi = b^t \eta$ . Aber

$$a^t \xi = a^t d(y \circ x^{-1})^{-1} d(y \circ x^{-1}) \xi = a^t d(x \circ y^{-1}) d(y \circ x^{-1}) \xi = b^t \eta,$$

Also transformieren sich die Hauptteile wie

$$b^t = a^t d(x \circ y^{-1}).$$

Die Transformation der Kovektoren geschieht also in der umgekehrten Richtung  $x \circ y^{-1}$ ; sie sind kontravariant. Entsprechend nennt man auch ein  $(r, s)$ -Tensorfeld  $r$ -fach kovariant und  $s$ -fach kontravariant.

Zum Ableiten von Tensorfeldern verwendet man die Produktregel. Sei dazu  $T$  ein  $(0, s)$ -Tensorfeld. Die *kovariante Ableitung* von  $T$  ist das  $(0, s+1)$ -Tensorfeld  $\nabla T$ , das erfüllt

$$(17) \quad \partial_X T(Y_1, \dots, Y_s) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_s, X) + T(\nabla_X Y_1, Y_2, \dots, Y_s) + \dots + T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_s).$$

Diese Ableitungsregel ist ganz natürlich, wenn man bedenkt, dass Tensoren lokal Summen von Produkten sind, die nach der Produktregel abzuleiten sind:

*Beispiel.*

$$\partial_Z (g(X, Y)) = \partial_Z \left( \sum_{ij} g_{ij}(p) \xi^i(p) \eta^j(p) \right) = (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Es gilt also  $\nabla g = 0 \iff \nabla$  mit der Metrik verträglich. Wir sagen auch  $g$  ist *parallel*.

Man muss die Wohldefiniertheit von (17) prüfen, also dass  $\nabla T$  wieder  $\mathcal{D}(M)$ -multilinear ist. Im Beispiel lautet der Beweis (der allgemeine Fall geht genauso):

$$\begin{aligned} (\nabla_Z g)(fX, Y) &= \partial_Z \underbrace{g(fX, Y)}_{fg(X, Y)} - g(\nabla_Z(fX), Y) - g(fX, \nabla_Z Y) \\ &= (f\partial_Z g(X, Y) + g(X, Y)\partial_Z(f)) - (fg(\nabla_Z X, Y) + g((\partial_Z f)X, Y)) - fg(X, \nabla_Z Y) \\ &= f(\nabla_Z g)(X, Y) \end{aligned}$$

Vektoren und Kovektoren sind für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten kanonisch isomorph. Ist  $\omega$  Kovektor, so gibt es ein  $Y \in \mathcal{V}(M)$ , so dass  $\omega(X) = g(X, Y)$  für alle  $X \in \mathcal{V}(M)$ , siehe Lemma II.13. Dies bedeutet, dass auch  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ -Tensorfelder kanonisch isomorph sind. Ein Beispiel isomorpher  $(1, 1)$  und  $(0, 2)$ -Tensoren sind zweite Fundamentalform  $b$  und Weingartenabbildung  $S$  einer Hyperfläche.

### 1.7. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 48 – TESTFRAGEN:

- Warum ist  $\mathbb{R}^n$  flach?
- Welche der folgenden Ausdrücke sind  $\mathcal{D}(M)$ -linear, wenn  $f \in \mathcal{D}(M)$  und  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ?
  - $X \mapsto \nabla_X Y$
  - $Y \mapsto \nabla_X Y$
  - $X \mapsto fX$
  - $X \mapsto [X, Y]$

#### Aufgabe 49 – KRÜMMUNG VON $H^2$ :

Berechnen Sie die Krümmung des oberen Halbebenen-Modells.

#### Aufgabe 50 – SKALIERTE METRIKEN:

Eine gegebene Riemannsche Metrik  $g$  werde mit einem konstanten Faktor  $r \in \mathbb{R}$  multipliziert,  $\tilde{g} := rg$ .

- Unter welcher Bedingung an  $r$  ist  $\tilde{g}$  ebenfalls Riemannsche Metrik?

Wie ändern sich

- die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$ ;
- der Riemannsche Krümmungstensor;
- die Schnittkrümmung (bzw. Gaußkrümmung in Dimension  $n = 2$ )?
- Sind Geodätische von  $(M, g)$  auch Geodätische von  $(M, \tilde{g})$ ?

#### Aufgabe 51 – KONFORME METRIKEN:

Nun sei  $(M, g)$  semi-Riemannsch und  $\tilde{g} = \lambda g$ , wobei  $\lambda \in \mathcal{D}(M)$ .

- Wie muss  $\lambda$  gewählt werden, damit auch  $(M, \tilde{g})$  semi-Riemannsch ist?

- b) Für welche  $\lambda$  besitzen  $g$  und  $\tilde{g}$  den gleichen Index?  
 c) Sind Geodätische von  $(M, g)$  auch Geodätische von  $(M, \tilde{g})$ ? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

**Aufgabe 52** – KRÜMMUNG VON ROTATIONSFLÄCHEN:

- a) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung des Rotationsparaboloids

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- b) Sei  $(r, h): I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$  eine reguläre Kurve. Geben Sie die Gaußsche Krümmung für eine Rotationsfläche  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$  an.

**Aufgabe 53** – LINSENÄUME:

Indem wir  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  identifizieren, wird  $\mathbb{S}^3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : w\bar{w} + z\bar{z} = 1\}$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  schreiben wir  $\mathbb{Z}_k = \{\zeta_\kappa := e^{2\pi i \kappa/k} : 0 \leq \kappa \leq k-1\}$  als multiplikative Gruppe  $k$ -ter Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$ .

- a)  $\mathbb{Z}_k$  operiert auf  $\mathbb{S}^3$  durch  $(w, z) \mapsto (w\zeta_\kappa, z\zeta_\kappa^m)$  eigentlich diskontinuierlich, und zwar für jedes  $m \in \mathbb{N}$ , das teilerfremd zu  $k$  ist.  
 b)  $\mathbb{Z}_k$  operiert durch Isometrien (oder auch orthogonal). Daher hat der Quotientenraum  $L(k, m) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_k$  mit Riemannscher Quotientenmetrik die konstante Krümmung  $+1$ . Warum ist  $\pi_1(L(k, 1)) \neq 0$ , wenn  $k \geq 2$ ?  
 c) Finden Sie eine geschlossene Geodätische mit Länge  $2\pi/k$  in  $L(k, 1)$ .  
 d) Bestimmen Sie  $r$ , so dass  $\exp_p: B_r \rightarrow L(k, 1)$  injektiv ist für alle  $p \in L(k, 1)$ .

**Aufgabe 54** – KONTRAKTIONEN:

- a) Was ist die Kontraktion eines  $(1, 1)$ -Tensors?  
 b) Zeigen Sie, dass eine Kontraktion basisinvariant ist.  
 c) Die Ricci-Krümmung wird definiert durch  $\text{Ric}_p(X) := \frac{1}{(n-1)\|X\|^2} \sum_{k=1}^{n-1} g(R(e_k, X)X, e_k)$ , wobei  $e_k$  eine Orthonormalbasis in  $T_p M \cap (X(p))^\perp$  ist. Warum hängt auch dieser Ausdruck nicht von der Basiswahl ab?

**Aufgabe 55** – PRODUKTMANNIGFALTIGKEITEN:

Es seien  $(M_1, g^1)$  und  $(M_2, g^2)$  nicht-leere Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Laut Aufg. 43 ist  $N := M_1 \times M_2$  mit der Metrik  $h_{(p,q)}(X, Y) := g_p^1(X_1, Y_1) + g_q^2(X_2, Y_2)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Hierbei schreiben wir ein Vektorfeld  $Z$  auf  $N$  als  $Z = (Z_1, Z_2)$  mit  $Z_i := d\pi_i(Z)$ , wobei  $\pi_i: N \rightarrow M_i$  die Projektion ist ( $i = 1, 2$ ).

- a) Zeigen Sie  $R_{(p,q)}(X, Y)Z = (R_p^1(X_1, Y_1)Z_1, R_q^2(X_2, Y_2)Z_2)$ .  
 b) Wieso gibt es für jedes  $(p, q) \in N$  immer eine Ebene  $\sigma$  in  $T_{(p,q)}N$  mit  $K_{(p,q)}(\sigma) = 0$ ?  
 c) Bestimmen Sie alle Schnittkrümmungen des Riemannschen Produktes  $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ , wobei  $\mathbb{S}^2$  die Standardmetrik besitzt.

*Anmerkung:* H. Hopf fragte in den fünfziger Jahren, ob  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  irgendeine Metrik positiver Krümmung besitzt. Das Problem ist nach wie vor offen.

**Aufgabe 56** – ZWEITE BIANCHI-IDENTITÄT:

Wir betrachten den Tensor  $T(X, Y, U, V) := g(R(X, Y)U, V)$ . Zeigen Sie die *zweite Bianchi-Identität*

$$\nabla T(X, Y, U, V, W) + \nabla T(X, Y, V, W, U) + \nabla T(X, Y, W, U, V) = 0.$$

Dabei ist die Tensorableitung  $\nabla T$  definiert durch die Produktregel

$$\partial_X T(Y_1, \dots, Y_r) := \nabla T(Y_1, \dots, Y_s, X) + T(\nabla_X Y_1, Y_2, \dots, Y_s) + \dots + T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_s).$$

*Tipp:* Für  $p \in M$  wähle geeignete Felder  $X_i$  mit  $\nabla_{X_i} X_j(p) = 0$ . Rechne dafür die obige Tensorableitung aus –zyklische Summe!– und benutze die Jacobi-Identität.

**Aufgabe 57** – SATZ VON SCHUR:

Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Zeigen Sie: Ist  $M$  *isotrop*, d.h. hängt  $K_p(\sigma)$  für kein  $p$  von  $\sigma$  ab, so hängt  $K_p(\sigma)$  sogar nicht einmal von  $p$  ab;  $M$  ist also eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.

*Tipp:* Sei  $T'(W, Z, X, Y) := g(Z, X)g(W, Y) - g(W, X)g(Z, Y)$ . Setzen wir  $T(W, Z, X, Y) := g(R(W, Z)X, Y)$ , so gilt nach Satz 6 dann  $T_p = \kappa(p)T'_p$ . Folgern Sie dann aus der 2. Bianchi-Identität,  $\nabla T(W, Z, X, Y, U) + \nabla T(W, Z, Y, U, X) + \nabla T(W, Z, U, X, Y) = 0$ , dass

$$\begin{aligned} 0 = & \partial_U \kappa \left( g(Z, X)g(W, Y) - g(W, X)g(Z, Y) \right) + \partial_X \kappa \left( g(Z, Y)g(W, U) \right. \\ & \left. - g(W, Y)g(Z, U) \right) + \partial_Y \kappa \left( g(Z, U)g(W, X) - g(W, U)g(Z, X) \right). \end{aligned}$$

Wählen Sie nun  $X, Y, Z$  orthonormal und  $U = Z$ . Es folgt  $g((\partial_Y \kappa)X - (\partial_X \kappa)Y, W) = 0$ . Warum ist also  $\kappa$  konstant?

25. Vorlesung, Dienstag 26.1.10 \_\_\_\_\_

## 2. ZWEITE VARIATION UND ANWENDUNGEN

Eine Geodätische stellt einen kritischen Punkt der Bogenlänge dar. Wir interessieren uns nun dafür, ob ein solcher kritischer Punkt ein Minimum der Bogenlänge darstellt. Dazu berechnen wir die zweite Variation. Weil sie die Krümmung enthält, können wir anschließend aus Krümmungsvoraussetzungen interessante Schlüsse ziehen.

**2.1. Zweite Variation der Bogenlänge.** Um die Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir anstelle einer allgemeinen Variation  $h_s(t)$  einen spezielleren Fall:

**Satz 11.** *Es sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und  $V(t)$  ein Vektorfeld längs  $c$  mit  $V(t) \perp c'(t)$ . Dann gilt für die Variation  $h_s(t) := \exp_{c(t)} sV(t)$*

$$(18) \quad \left. \frac{d^2}{ds^2} L(h_s) \right|_{s=0} = \int_a^b \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2 - K_c(V, c') \|V\|^2 dt.$$

*Dies gilt auch im stückweise differenzierbaren Fall, d.h. wenn  $V$  stetig ist und differenzierbar bis auf endlich viele Ausnahmepunkte.*

Beachten Sie, dass die erste Variation in diesem Fall verschwindet, denn das Vektorfeld  $V$  steht in den Endpunkten senkrecht auf  $c'$ .

Wir bezeichnen (18) als *zweite Variation* der Bogenlänge von  $c$ . Sie hängt nur vom Vektorfeld  $V$  längs  $c$  ab, bzw. genauer von  $V$  und  $\frac{D}{dt}V$ . Daher schreiben wir auch  $\delta_{V,V}^2 L(c)$  für  $\frac{d^2}{ds^2}(L(c))$ ; der Doppelindex deutet an, dass die zweite Variation eine quadratische Form in  $V$  ist, genauso wie ihr endlich dimensionales Analogon, die Hesse-Form.

*Beispiel.* In  $\mathbb{R}^n$  ist  $K \equiv 0$ . Also ist für  $c$  Gerade  $\frac{d^2}{ds^2}(L(c)) = \int_a^b \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2 \geq 0$ . Es gilt sogar “>”, wenn  $V \neq \text{const}$  längs  $c$ . Geraden sind also Minima der Bogenlänge.

*Beweis.* Wir schreiben die Variationsvektorfelder als

$$T(s, t) := \frac{\partial}{\partial t} h_s(t), \quad V(s, t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \in T_{h_s(t)} M.$$

Dabei gilt  $V(0, t) = V(t)$ . Weiter ist  $s \mapsto \exp_{c(t)} sV(t)$  geodätisch mit Tangentialvektor  $V(s, t)$ , so dass  $\frac{D}{ds} V(s, t) = 0$  für alle  $s, t$  gilt.

Wir berechnen zuerst die zweite Variation der Energie, also  $\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \int_a^b g(T, T) dt$ . Nach Lemma II,23 vertauschen die Ableitungen:  $\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}$ , d.h.  $\frac{D}{dt} V = \frac{D}{ds} T$ . Es folgt

$$(19) \quad \frac{d}{ds} g(T, T) = 2g\left(\frac{D}{ds} T, T\right) = 2g\left(\frac{D}{dt} V, T\right)$$

und daraus

$$\frac{d^2}{ds^2} g(T, T) = 2g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V, T\right) + 2g\left(\frac{D}{dt} V, \underbrace{\frac{D}{ds} T}_{\frac{D}{dt} V}\right).$$

Wir möchten nun die  $t$ -Ableitung aus dem ersten Skalarprodukt herausziehen, um partiell zu integrieren. Weil  $V, T$  Kartenfelder sind, gilt  $[V, T] = 0$ , und wir erhalten

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V + R(V, T)V = R(V, T)V.$$

Wenn wir die kovarianten Ableitungen vertauschen, so handeln wir uns also einen Krümmungsterm ein! Es ist also genau die technische Definition des Krümmungstensors und nicht seine anschauliche Deutung, die wir benötigen.

Also ist

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} g(T, T) = g(R(V, T)V, T) + \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2,$$

so dass wir für jedes  $s$  durch Integration über  $t$  erhalten

$$(20) \quad \frac{d^2}{ds^2} E(h_s) = \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{2} \int_a^b g(T, T) dt = \int_a^b \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2 - g(R(V, T)T, V) dt.$$

Dieser Ausdruck zeigt übrigens, dass durch  $\delta_{V,W}^2 E := \int g\left(\frac{D}{dt} V, \frac{D}{dt} W\right) - g(R(V, T)T, W) dt$  die entsprechende Bilinearform gegeben ist.

Wir gewinnen nun aus (20) die zweite Variation der Bogenlänge. Für jedes  $s$  gilt

$$(21) \quad \frac{d}{ds} L(h_s) = \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{g(T, T)} dt = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{g(T, T)}} \frac{d}{ds} g(T, T) dt.$$

Wir spezialisieren nun auf  $s = 0$ , um (erst hier) die Geodätischen-Bedingung  $\frac{D}{dt} T(0, t) = \frac{D}{dt} c'(t) = 0$  und die Voraussetzung  $V(0, t) \perp T(0, t) = c'(t)$  zu verwenden:

$$(22) \quad \left. \frac{d}{ds} g(T, T) \right|_{s=0} \stackrel{(19)}{=} 2g\left(\left. \frac{D}{dt} V, T \right|_{s=0}\right) = 2 \left. \frac{d}{dt} g(V, T) \right|_{s=0} = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Wir berechnen nun die zweite Variation der Länge durch Differenzieren von (21). Dabei verwenden wir  $g(T, T)|_{s=0} = \|c'\| \equiv 1$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} L(h_s) \right|_{s=0} &= \int_a^b \left( \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{2\sqrt{g(T, T)}} \right|_{s=0} \underbrace{\left. \frac{d}{ds} g(T, T) \right|_{s=0}}_{\equiv 0 \text{ nach (22)}} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2} g(T, T) \right|_{s=0} \right) dt \\ &= \left. \frac{d^2}{ds^2} E(h_s) \right|_{s=0} \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir (20) ein, wobei wir den Krümmungstensorterm in (20) durch die Schnittkrümmung ersetzen (dabei benutzen wir erneut  $V(t) \perp T(t) = c'(t)$ ). Wir erhalten (18).

Um dasselbe Endergebnis auf den stückweise differenzierbaren Fall zu übertragen, brauchen wir nur über die differenzierbaren Teilintervalle zu summieren.  $\square$

Im Falle von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{H}^n$  hatten wir schon direkt gezeigt, dass Geodätische die Bogenlänge minimieren. Wie Zylinder oder flacher Torus zeigen, ist dies im allgemeinen aber nicht garantiert. Beschränkt man sich allerdings auf zu einer Geodätischen  $c$  "nah benachbarte" Kurven  $t \mapsto \exp_{c(t)} sV(t)$ , so ist die Bogenlänge der Geodätischen  $c$  stets kürzer, falls die Krümmung 0 nicht überschreitet:



**Korollar 12.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, d.h.  $K_p(\sigma) \leq 0$  für alle  $p \in M$  und Ebenen  $\sigma \subset T_p M$ . Dann ist jede Geodätische  $c: [a, b] \rightarrow M$  ein lokales Minimum der Bogenlänge, d.h. es gilt

$$\delta_{V,V}^2 L(c) > 0 \quad \text{für alle } V \text{ mit } V(a) = V(b) = 0, V \perp c', V \neq 0$$

( $V$  ist also ein nicht verschwindendes senkrechtes und eigentliches Variationsfeld).

*Beweis.* Ist die Krümmung strikt negativ, so folgt das Ergebnis direkt aus (18), sogar ohne dass wir  $V(a) = V(b) = 0$  voraussetzen müßten.

Nehmen wir für den allgemeinen Fall an, das Integral (18) wäre  $\leq 0$ . Wegen der Vorzeichen der beiden Summanden folgt dann  $\frac{D}{dt}V = 0$  längs  $c$ , d.h.  $V$  ist parallel längs  $c$ . Aber ein paralleles Feld hat konstante Länge. Wegen der Randbedingung muss also  $V$  identisch verschwinden, was aber ebenfalls ausgeschlossen ist.  $\square$

## 2.2. Satz von Myers.

**Definition.** Der Durchmesser  $\text{diam}(M) \in [0, \infty]$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  ist

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q) : p, q \in M\}$$

*Beispiel.* 1.  $\mathbb{S}_r^n$  hat  $\text{diam}(\mathbb{S}_r^n) = \pi r$ , denn Antipoden  $p, -p$  haben  $d(p, -p) = \pi r$ . Andere Punkte werden durch Großkreisbögen kürzerer Länge verbunden.

2.  $\text{diam}(\mathbb{R}P^n) = \frac{\pi}{2}$ .

3. Der flache Torus  $T^n$  hat nach Pythagoras  $\text{diam}^2 = n(\frac{1}{2})^2$  also,  $\text{diam}(T^n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$ .

## 26. Vorlesung, Mittwoch 27.1.10

---

Der Satz von Myers zeigt, dass große positive Krümmung einen kleinen Durchmesser bedeutet.

**Satz 13** (Bonnet 1855 ( $n = 2$ ), Myers 1941). Sei  $M$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt

$$K_p(\sigma) \geq \frac{1}{r^2} \quad \text{für alle } p \in M \text{ und Ebenen } \sigma \subset T_p M,$$

so ist  $\text{diam}(M) \leq \pi r$ .

*Bemerkungen.* 1. Aus  $K_p > 0$  folgt nicht, dass  $\text{diam}(M) < \infty$ : Das Rotations-Paraboloid  $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  hat unendlichen Durchmesser, aber  $K_p > 0$  (Übung).

2. Es ist nötig, im Satz die Vollständigkeit vorauszusetzen. Wir bilden einen Streifen  $S := \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  durch Kugelkoordinaten auf eine  $\varepsilon$ -Umgebung des Äquators von  $\mathbb{S}^2$  ab. Zwei Punkte  $(x, y)$  und  $(x + 2\pi, y)$  werden durch diese Überlagerungsabbildung auf denselben Punkt von  $\mathbb{S}^2$  abgebildet. Versehen wir den Streifen  $S$  mit der induzierten Metrik  $g$ , so

erhalten wir eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(S, g)$ , die wir uns als (unendlich lange) Abwicklung der Äquatorumgebung vorstellen. Sie hat konstante Krümmung  $K \equiv 1$ , ist aber nicht vollständig. Sie hat  $\text{diam}(S, g) = \infty$ , denn die Punkte  $(0, 0)$  und  $(2\pi k, 0)$  für  $k \in \mathbb{N}$  haben einen Abstand von fast  $2\pi k$  (Übung).

*Beweis.* Wir nehmen indirekt an, es wäre  $\text{diam}(M) > \pi r$ . Dann gibt es zwei Punkte  $p, q \in M$  mit  $\text{dist}(p, q) > \pi r$ . Nach dem Satz II,36 von Hopf-Rinow existiert eine Kürzeste  $c$  von  $p$  nach  $q$  mit

$$(23) \quad L := L(c) = \text{dist}(p, q) > \pi r.$$

Weil  $c$  Kürzeste ist, muss  $\delta_{V,V}^2 L(c) \geq 0$  für alle  $V$  gelten, denn sonst würde die Variation verkürzende Geodätische enthalten.

Wir nehmen nun an, dass  $c$  nach Bogenlänge auf  $[0, L]$  parametrisiert ist. Es sei  $E = E(0) \perp c'(0)$  Einheitsvektor. Nach Satz II,12 bleibt die Parallelverschiebung  $E(t)$  von  $E(0)$  ein Einheitsvektor, der auch senkrecht auf  $c'(t)$  bleibt. Wir betrachten nun das ebenfalls auf  $c'$  senkrechte Feld

$$V(t) := \frac{L}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{L} t \right) E(t),$$

das auf einer Sphäre mit Riemannischem Durchmesser  $L$  gerade ein Variationsvektorfeld einer Geodätischenschar angeben würde.

Nun betrachten wir die zweite Variation (18) von  $h_s(t) := \exp_{c(t)} sV(t)$ . Wegen

$$\frac{D}{dt} V = \frac{L}{\pi} \left[ \frac{d}{dt} \left( \sin \frac{\pi}{L} t \right) E(t) + \left( \sin \frac{\pi}{L} t \right) \underbrace{\frac{D}{dt} E(t)}_{=0} \right] = \left( \cos \frac{\pi}{L} t \right) E(t)$$

folgt

$$\delta_{V,V}^2 L(c) = \int_0^L \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2 - K(V, c') \|V\|^2 dt = \int_0^L \cos^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) - \frac{L^2}{\pi^2} K(E, c') \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) dt.$$

Aber aus der Krümmungsvoraussetzung folgt

$$K_c(E, c') \geq \frac{1}{r^2} \stackrel{(23)}{>} \frac{\pi^2}{L^2},$$

so dass

$$\delta_{V,V}^2 L(c) < \int_0^L \cos^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) dt - \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) dt = 0.$$

Also ist  $c$  doch nicht Kürzeste. □

**Korollar 14.** Sei  $M$  vollständig und für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gelte

$$K_p(\sigma) \geq \lambda > 0 \quad \text{für alle } p \in M \text{ und Ebenen } \sigma \subset T_p M.$$

(i) Dann ist  $M$  kompakt.

(ii) Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  ist endlich.

Das Rotationsparaboloid zeigt, dass die schwächere Voraussetzung  $K > 0$  noch nicht die Kompaktheit impliziert.

*Beweis.* (i) Nach Korollar II,35 ist  $\exp_p$  für jedes  $p$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert. Nach dem Satz von Myers ist  $\exp_p(\overline{B_{\pi r}}) = M$  für ein  $r > 0$ . Nun ist  $\overline{B_{\pi r}} \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Da  $\exp$  stetig ist, ist auch  $M = \exp_p(\overline{B_{\pi r}})$  kompakt.

(ii) Sei  $\tilde{M}$  die universelle Überlagerung von  $M$ . Weil  $M$  und  $\tilde{M}$  lokal isometrisch sind, gilt für  $\tilde{M}$  dieselbe Krümmungsschranke. Ferner ist auch  $\tilde{M}$  wieder vollständig. Nach Teil (i) ist  $\tilde{M}$  kompakt. Also muss  $\pi_1(M)$  endlich sein.  $\square$

Die Aussage (ii) bedeutet, dass Mannigfaltigkeiten, die Quotienten von einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit von 0 weg beschränkter positiver Krümmung sind, nur der Quotient unter endlichen diskreten Isometriegruppen sein können. Beispiele sind  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$  oder die Linsenräume. Dagegen sind im Falle negativer Krümmung unendliche diskrete Gruppen möglich, so z.B. beim hyperbolischen Raum. Auch der euklidische Raum hat solche Quotienten: Tori  $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  oder Zylinder.

### 2.3. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 58 – ZWEITE VARIATION EINES GROSSKREISES:

Auf  $\mathbb{S}^2$  betrachten wir den Großkreis  $c(t) := e_3 \cos t + e_1 \sin t$  und seine Variation durch Großkreise  $h_s(t) := e_3 \cos t + \sin t(e_1 \cos s + e_2 \sin s)$ .

- Zeigen Sie, dass das Variationsfeld  $V(t)$  orthogonal zu  $c'(t)$  ist.
- Für welche  $t$  ist  $h_s$  eigentlich?
- Was ist  $L(h_s([0, \pi]))$ ?
- Berechnen Sie die zweite Variation der Bogenlänge von  $c([0, \pi])$ .

#### Aufgabe 59 – SATZ VON MYERS:

Beweisen Sie folgende Aussage:

Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt

$$\operatorname{Ric}_p(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g(R(X, e_i)e_i, X) \geq \frac{1}{r^2}$$

für alle  $p \in M$  und  $X \in T_p M$  mit  $g(X, X) = 1$ , wobei  $r \in (0, \infty)$  und  $e_i$  Orthonormalbasis von  $T_p M \cap (X(p))^\perp$  ist, dann ist  $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$ .

## 3. JACOBIFELDER

Wir interessieren uns für folgende Fragen:

1. Wie nah liegen Geodätische beieinander? z.B. für  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$ .
2. Wann ist  $d\exp$  injektiv? Wir werden hier nur lokal Injektivität untersuchen.

3.1. **Existenz.** Wir sagen  $h_s(t)$  ist eine *Variation von  $c: [a, b] \rightarrow M$  durch Geodätische*, wenn gilt:

$$(24) \quad h_0(t) = c(t), \quad \frac{D}{dt} h'_s(t) \equiv 0 \quad \forall s.$$

**Satz 15.** *Es sei  $c$  geodätisch und  $h_s(t)$  eine Variation von  $c$  durch Geodätische. Dann erfüllt das Vektorfeld  $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t)|_{s=0}$  längs  $c$  die Jacobische Differentialgleichung*

$$(25) \quad J'' + R(J, c')c' = 0,$$

wobei  $J''(t) := \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} J(t)$ .

Ein Vektorfeld längs einer Geodätischen, das (25) erfüllt, heißt *Jacobifeld*. Ein Jacobifeld gibt die Spreizung infinitesimal benachbarter Geodätischer an; es beschreibt den Abstand einer Geodätischenschar in 1. Ordnung.

*Beispiele.* 1. In  $\mathbb{R}^n$  lautet (25)  $J'' = 0$  und wird genau von  $J(t) = X + Yt$  für  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  erfüllt. Tatsächlich ist für  $c(t) = a + bt$  (geodätisch) sogar  $h_s(t) := a + bt + s(X + Yt) = a + sX + t(b + sY)$  geodätisch für jedes  $s$ . Das Jacobifeld beschreibt Nachbargeodätische sogar global, nicht nur infinitesimal (denn  $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$ ).

2. Auf  $\mathbb{S}^n$  gilt  $J(t) = v \sin t$  (Übung).

3. Ist  $c(t)$  geodätisch, so sind auch Reparametrisierungen, z.B.  $h_s^1(t) := c(s + t)$  bzw.  $h_s^2(t) := c((1 + s)t)$  Variationen durch Geodätische. Also sind  $J_1(t) := \frac{\partial}{\partial s} c(s + t)|_{s=0} = c'(t)$  bzw.  $J_2(t) := \frac{\partial}{\partial s} c((1 + s)t)|_{s=0} = tc'(t)$  Jacobifelder.

*Beweis.* Weil  $0 = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t} h_s(t)$  für alle  $s, t$  gilt, folgt

$$0 = \frac{D}{ds} \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} + R \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \stackrel{\nabla \text{ symm.}}{=} \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} + R \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial h}{\partial t};$$

dies geht wieder mit  $R(J, T)T = \nabla_J \nabla_T T - \nabla_T \nabla_J T$  wie im Beweis der 2. Variation. Für  $s = 0$  folgt die Jacobi-Gleichung.  $\square$

Als erstes analysieren wir die Jacobi-Gleichung: Jacobifelder existieren eindeutig zu gegebenen Anfangsbedingungen  $J(a), J'(a)$ :

**Lemma 16.** Sei  $c: [a, b] \rightarrow M^n$  geodätisch. Die Jacobi-Gleichung ist ein System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung und hat für gegebene Anfangswerte  $J(a) = v$  und  $J'(a) = w$  genau eine Lösung  $J: [a, b] \rightarrow T_{c(t)}M$ . Insbesondere ist der Raum  $\mathcal{J}_c$  der Jacobifelder längs  $c$  ein  $2n$ -dimensionaler Vektorraum.

Aus Beispiel 3 folgt, dass  $c', tc'$  einen 2-dimensionalen Unterraum tangentialer Jacobifelder aufspannen. In den Übungen wird gezeigt, dass dies bereits alle tangentialen Jacobifelder sind, d.h. der Raum der Felder, die senkrecht auf  $c'$  stehen, hat Dimension  $2n - 2$ .

*Beweis.* Sei  $E_1 := c', E_2, \dots, E_n$  eine parallele Orthonormalbasis längs  $c$ , erhalten z.B. durch Parallelverschiebung einer ONB in  $c(a)$ . Jedes Vektorfeld  $X$  längs  $c$  lässt sich dann schreiben als  $X(t) = \sum_{k=1}^n \xi^k(t) E_k(t)$ . Wir erhalten dann

$$X' = \frac{D}{dt} \left( \sum_k \xi^k E_k \right) = \sum_k \frac{d\xi^k}{dt} E_k, \quad X'' = \frac{D}{dt} X' = \sum_k \frac{d^2 \xi^k}{dt^2} E_k.$$

Ferner ist

$$R(X, c')c' = R\left(\sum_i \xi^i E_i, c'\right)c' = \sum_i \xi^i R(E_i, c')c' = \sum_{i,k} \xi^i (R_{i11}^k \circ c) E_k,$$

wobei die letzte Gleichheit die  $R_{i11}^k$  definiert. Benutzen wir noch die lineare Unabhängigkeit der  $E_k$ , so folgt

$$\frac{d^2 \xi^k}{dt^2}(t) + \sum_{i=1}^n \xi^i(t) R_{i11}^k \circ c(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein System von  $n$  gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung in  $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$  auf dem Intervall  $[a, b]$ . Die Koeffizienten  $R_{i11}^k \circ c$  sind glatt, insbesondere Lipschitz. Daher gibt es genau eine Lösung mit Anfangswerten  $\xi^k(a) = v^k, \frac{d}{dt} \xi^k(a) = w^k$ , die wegen der Linearität auf ganz  $[a, b]$  erklärt ist.  $\square$

## 27. Vorlesung, Dienstag 2.2.10

---

Mithilfe der Exponentialabbildung können wir Scharen von Geodätischen  $h_s(t)$  angeben. Wir werden uns auf den Fall beschränken, dass die Geodätischen alle durch einen gemeinsamen Punkt  $p$  gehen. Ist  $c(t) = \exp tu$  gegeben, so ergeben zum Beispiel die Strahlen  $t \mapsto t(u + sw) \in T_p M$  eine Variation durch radiale Geodätische

$$(26) \quad h_s(t) := \exp_p t(u + sw).$$

Sie erzeugen das Jacobifeld  $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h|_{s=0}$

$$(27) \quad J(t) = (d \exp_p)_{tu} \cdot tw$$

mit  $J(0) = (d \exp_p)_0 0 = 0$ .

**Satz 17.** *Ist  $J$  Lösung von (25) längs  $c$  mit  $J(0) = 0$ , so ist  $J$  Variationsvektorfeld der Variation  $h_s(t) := \exp_p t(u + sw)$  mit  $p := c(0)$ ,  $u := c'(0)$  und  $w := J'(0)$ .*

*Beweis.* Offenbar ist  $t \mapsto h_s(t)$  geodätisch für alle  $s$ . Daher erfüllt  $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h|_{s=0} = (d \exp_p)_{tu} \cdot tw$  nach Satz 15 auch (25). Weiter:

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{D}{dt} J(t) \Big|_{t=0} = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} h \Big|_{s,t=0} \stackrel{\text{Lemma II.23}}{[\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}] = 0} = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} h \Big|_{s,t=0} \\ &= \frac{D}{ds} (d \exp_p)_{t(u+sw)} \cdot (u + sw) \Big|_{s,t=0} = \frac{D}{ds} (d \exp_p)_0 \cdot (u + sw) \Big|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Satz 20}}{=} \frac{D}{ds} (\text{id} \cdot (u + sw)) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} (sw) \Big|_{s=0} = w \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eindeutigkeitsaussage von Lemma 16.  $\square$

Wegen (26) und (27) können wir die durch  $d \exp$  beschriebene Spreizung der Geodätischen als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung berechnen, welche die Krümmung längs  $c$  enthält:

**Korollar 18.** *Seien  $u \in T_p M$  und  $w \in T_u T_p M = T_p M$ . Ist die Geodätische  $c(t) := \exp_p tu$  auf  $[0, 1] \rightarrow M$  definiert, und  $J(t)$  das Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w$ , so gilt*

$$(28) \quad (d \exp_p)_u \cdot w = J(1).$$

**3.2. Krümmungsberechnung für  $\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{H}^n$ .** Da die Jacobi-Gleichung die Krümmung als Koeffizient enthält, kann man aus der expliziten Kenntnis der Geodätischen auf die Krümmung zurückschließen.

**Satz 19.** *Sei  $n \geq 2$ .*

- (i)  $\mathbb{S}^n$  hat Schnittkrümmung  $K \equiv 1$ ,
- (ii)  $\mathbb{H}^n$  hat Schnittkrümmung  $K \equiv -1$ .

Teil (i) hatten wir in Satz 7 unter Benutzung des theorema egregium bereits gezeigt.

*Beweis.* (i) Sei  $p \in \mathbb{S}^n$  und  $v \perp w$  Einheitsvektoren in  $T_p \mathbb{S}^n$ . Wir wollen  $K_p(v, w)$  berechnen.

Wegen  $w \perp p$  ist  $c(t) := w \cos t + p \sin t$  Großkreis. Weil  $p, v, w$  paarweise senkrecht stehen, ist  $h_s(t) = w \cos t + \sin t(p \cos s + v \sin s)$  eine Variation durch Geodätische. Insbesondere gilt die Jacobi-Gleichung  $R_c(J, c')c' = -J''$  für das Variationsvektorfeld  $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t)|_{s=0} = v \sin t$ . Wir berechnen

$$J' = \frac{D}{dt} v \sin t = \left( \frac{d}{dt} v \sin t \right)^{\tan} = v^{\tan} \cos t = v \cos t \quad \Rightarrow \quad J'' = \frac{D}{dt} v \cos t = -v \sin t = -J.$$

Also folgt für jedes  $t$ :

$$(29) \quad K(J, c') = \frac{g(R(J, c')c', J)}{\|c'\|^2 \|J\|^2} = \frac{g(-J'', J)}{\|J\|^2} = \frac{g(J, J)}{\|J\|^2} = 1$$

Dabei ist  $K, R, g, \|\cdot\|$  jeweils an der Stelle  $c(t)$  ausgewertet. Speziell für  $t = \frac{\pi}{2}$  folgt  $K_p(v, w) = K_p(v, -w) = 1$ .

(ii) Wir gehen ähnlich wie in (i) vor. Wir betrachten den speziellen Punkt  $p = (0, \dots, 0, 1) \in H^n$  und die Vektoren  $v = (v_0, 0)$  und  $w = (0, \dots, 0, 1)$  in  $T_p H^n$ . Die Kurve  $c(t) := (0, e^t)$  ist eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Die Variation  $h_s(t) = (sv_0, e^t)$  besteht aus Geodätischen; sie hat das Variationsvektorfeld  $J(t) := (v_0, 0)$

Wir wollen nun allein durch ein Symmetrieargument  $J''$  berechnen, ohne Christoffelsymbole benutzen zu müssen. Zuerst überlegen wir, dass  $E(t) := e^t(v_0, 0) \in T_{c(t)} H^n$  ein Vektorfeld konstanter Länge ist, denn

$$\|e^t(v_0, 0)\|_{c(t)}^{H^n} = \frac{1}{e^t} \|e^t(v_0, 0)\|^{\mathbb{R}^n} = \|v_0\|^{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Wir behaupten, dass  $E$  sogar parallel längs  $c$  ist. Dazu betrachten wir Spiegelungen an senkrechten Ebenen  $(q, 0)^\perp$  für  $q \perp v_0$ . Alle solchen Spiegelungen sind Isometrien von  $H^n$ , die  $E(0)$  invariant lassen. Wegen des Eindeutigkeitsatzes müssen sie auch die parallele Fortsetzung  $\tilde{E}(t)$  invariant lassen. Aber das bedeutet  $\tilde{E}(t) \parallel E(t)$ . Weil aber parallele Felder konstante Länge haben, muss  $\tilde{E}(t) = E(t)$  gelten, d.h.  $E(t)$  ist parallel.

Es folgt wegen  $J(t) = e^{-t}E(t)$

$$J''(t) = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} (e^{-t}E(t)) \stackrel{E \text{ par.}}{=} \frac{D}{dt} \left( \frac{d}{dt} (e^{-t}) E(t) \right) = \frac{D}{dt} (-e^{-t}E(t)) = e^{-t}E(t) = J(t).$$

Wie in (29) erhalten wir so

$$K_p(v, w) = K(J, c') = \frac{1}{\|J\|^2} g(-J'', J) = \frac{1}{\|J\|^2} g(-J, J) = -1.$$

Weil aber die Isometriegruppe von  $H^n$  transitiv auf Punkten und transitiv auf Ebenen des Tangentialraums operiert, gilt für  $K_q(\sigma) = -1$  für alle  $q \in H^n$  und  $\sigma$  Ebenen in  $T_q M$ .  $\square$

## 28. Vorlesung, Mittwoch 3.2.10

---

**3.3. Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung oder Dimension 2.** Es sei  $M^n$  eine Mannigfaltigkeit mit  $n = 2$  und Gauß-Krümmung  $K$ , oder  $M$  habe konstante Krümmung  $K$ . Längs einer bogenlängenparametrisierten Geodätischen  $c: I \rightarrow M$  sei  $J$  ein Jacobifeld mit  $J(t) \perp c'(t)$  für alle  $t$ . Nach Satz 6 ist dann

$$g(R(J, c')c', X) = K \left( \underbrace{g(c', c')}_1 g(J, X) - \underbrace{g(J, c')}_0 g(c', X) \right) = Kg(J, X) \quad \forall X.$$

Durch Vergleich folgt  $R(J, c')c' = KJ$ . Also vereinfacht sich die Jacobi-Gleichung (25) auf

$$(30) \quad J'' + KJ = 0 \quad \text{für } J \perp c'.$$

Sei nun  $E(t) \perp c'(t)$  parallel längs  $c$ . Ist  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so erfüllt  $J(t) := a(t)E(t)$  zunächst  $J' = a'E + aE' = a'E$  und daher  $J''(t) = a''(t)E(t)$ . Daher ist  $J$  Lösung von (30) und damit Jacobifeld, wenn  $a$  die skalare Gleichung

$$(31) \quad a'' + Ka = 0.$$

erfüllt, wobei  $K = K(c(t))$ .

Falls  $K = \kappa$  konstant ist, kann man (31) explizit lösen:

**Satz 20.** *In einer Raumform mit Krümmung  $\kappa$  sind die Jacobifelder mit  $J_1(0) = 0$ ,  $J_1'(0) = E(0)$  bzw.  $J_2(0) = F(0)$ ,  $J_2'(0) = 0$  gegeben durch*

$$(32) \quad J_1(t) := \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\kappa} t}{\sqrt{\kappa}} E(t) & \kappa > 0, \\ tE(t) & \kappa = 0, \\ \frac{\sinh \sqrt{-\kappa} t}{\sqrt{-\kappa}} E(t) & \kappa < 0, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad J_2(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa} t)F(t) & \kappa > 0, \\ F(t) & \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa} t)F(t) & \kappa < 0, \end{cases}$$

wobei  $E(t)$  bzw.  $F(t)$  die parallelen Fortsetzungen von  $E(0)$  bzw.  $F(0)$  längs  $c$  sind.

Der allgemeine Fall entsteht hieraus durch Linearkombination.

Wir untersuchen den Fall  $n = 2$  mit (variabler) Gauß-Krümmung  $K$  genauer.

In  $T_p M = \mathbb{R}^2$  benutzen wir Polarkoordinaten,  $tv(\varphi) = t(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , bezüglich derer exp lautet

$$f: (0, r) \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad f(t, \varphi) := \exp_p tv(\varphi).$$

Hat  $d \exp_p$  auf  $B_r$  Rang 2 (immer für kleines  $r$ ), so auch  $df$  auf  $(0, r) \times \mathbb{R}$ . Dies bestätigen wir durch Berechnen der ersten Fundamentalform. Zunächst ist die Radialableitung

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi) \right\| = \left\| (d \exp_p)_{tv(\varphi)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(tv(\varphi)) \right\| = \|v(\varphi)\| = 1,$$

denn  $d \exp$  ist in dieser Richtung isometrisch. Also  $g_{11}(t, \varphi) = 1$ . Wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \perp \frac{\partial}{\partial \varphi}$  folgt  $g_{12} = g(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}) = 0$  aus dem Gauss-Lemma II,29. Die Größe  $g_{22}(t, \varphi) = \|\frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi)\|^2$  interessiert uns.

Für spätere Verwendung berechnen wir nun  $t$ -Ableitungen von  $\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi)\| := \sqrt{g_{22}(t, \varphi)}$  in  $t = 0$ . Zunächst haben wir als nullte  $t$ -Ableitung

$$(33) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(0, \varphi) \right\| = \|(d \exp_p)_0 0\| = 0.$$



Für alle  $\varphi$  sind die radialen Kurven  $t \mapsto f(t, \varphi)$  geodätisch, und daher ist  $J(t) := \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi)$  Jacobifeld. Wir fixieren nun  $\varphi$  und wählen ein paralleles Feld  $E(t)$  längs der Geodätischen  $c(t) := f(t, \varphi)$  mit  $\|E\| = 1$  und  $E \perp c'$ . Dann ist  $J(t) \parallel E(t)$  (Übung). Wir können verlangen, dass  $g(E, J) > 0$  für  $t > 0$ .

Wir behaupten  $J'(0) = E(0)$ . In der Tat gilt auch  $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_p t(v(\varphi) + sE(0))|_{s=0}$ . Nach Satz 17 folgt  $J'(0) = E(0)$ . Wir erhalten daraus als erste  $t$ -Ableitung

$$(34) \quad \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\|_{t=0} = \|J(t)\|'_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} g\left(\frac{J(t)}{\|J(t)\|}, J'(t)\right) = g(E(0), E(0)) = 1.$$

Aus  $J(t) \parallel E(t)$  folgt weiter also  $J(t) = \|J(t)\|E(t) = \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\| E(t)$ . Nach (31) gilt

$$(35) \quad K(f(t, \varphi)) \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\| = -\frac{d^2}{dt^2} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\|$$

für  $t \geq 0$ , so dass wir auch die zweite  $t$ -Ableitung kennen.

Wir wollen diese Formel benutzen, um die Länge von Kreisen auszurechnen. Es sei  $S_r := \mathbb{S}_r^1(0) \subset T_p M$ . Wir bezeichnen mit  $L(S_r(p))$  die Länge der geschlossenen Kurve  $\exp_p S_r$ .

**Satz 21** (Bertrand/Puisieux 1848). *Sei  $M$  zwei-dimensional mit Gauß-Krümmung  $K$ . Dann gilt*

$$L(S_r(p)) = 2\pi r \left( 1 - \frac{K(p)}{6} r^2 + o(r^2) \right).$$

Äquivalent ist

$$K(p) = \lim_{r \searrow 0} \frac{6}{r^2} \left( 1 - \frac{L(S_r(p))}{2\pi r} \right).$$

*Beweis.* Wir betrachten eine radiale Geodätische  $c(t) := f(t, \varphi)$ ,  $t \in (0, r)$ , zunächst für festes  $\varphi$ . Weiter schreiben wir das Jacobifeld  $J(t) = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(t, \varphi)$  als  $J(t) = a(t)E(t)$  mit  $\|E\| = 1$ ,  $E \perp c'$ , und  $\frac{D}{dt} E = 0$ , dabei ist  $a(t) = \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\|$ .

Durch Verwendung der Taylorreihe von  $a$  in 0 erhalten wir die Darstellung

$$\|J(t)\| = \|a(t)E(t)\| = |a(t)| = \left| \sum_{j=1}^k \frac{a_j(0)}{j!} t^j + o(t^k) \right|.$$

Wir können die Koeffizienten für  $k = 3$  berechnen:

$$\begin{aligned} a_0(0) &= a(0) \stackrel{(33)}{=} 0 \\ a_1(0) &= \frac{da}{dt}(0) \stackrel{(34)}{=} 1 \\ a_2(0) &= \frac{d^2a}{dt^2}(0) \stackrel{(35)}{=} -K(c(0))a(0) \stackrel{(33)}{=} 0 \\ a_3(0) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2a}{dt^2}(t) \right) \Big|_{t=0} \stackrel{(35)}{=} -\frac{d}{dt} \left( K(c(t)) a(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} K(c(t)) \Big|_{t=0} \underbrace{a(0)}_0 - K(c(0)) \frac{da}{dt}(0) = -K(p). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Taylorreihe gibt

$$\|J(t)\| = \left| ta_1 + \frac{t^3}{3!}a_3 + o(t^3) \right| \stackrel{t \text{ klein}}{=} t - \frac{t^3}{3!}K(p) + o(t^3)$$

für jeden Wert von  $\varphi$ . Daher können wir die Länge der Kurve  $\varphi \mapsto f(r, \varphi)$  für  $\varphi \in [0, 2\pi]$  bestimmen als

$$L(S_r) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\| d\varphi = \int_0^{2\pi} \|J_\varphi(r)\| d\varphi = 2\pi \left( r - \frac{K(p)}{3!}r^3 + o(r^3) \right).$$

□

Die Formel gilt auch in folgender Situation. Sei  $M$   $n$ -dimensional und  $v, w$  ONB einer Ebene  $\sigma$  in  $T_pM$ . Dann ist  $f: B_r \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  mit  $f(t, \varphi) := \exp_p t(v \cos \varphi + w \sin \varphi)$  definiert, und hat für kleines  $r$  Rang 2. Die Formel gilt daher für die Kreise  $S_r(p, \varphi) := \{f(t, \varphi) : t = r\}$  mit Schnittkrümmung  $K_p(\sigma)$ .

### 3.4. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 60 – TEST:

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen stimmen: Beweis oder Gegenbeispiel.

- Sind  $J_1, J_2, J_3$  Jacobifelder, so auch  $J_1 + 2J_2 + 3J_3$ .
- Jacobifelder haben konstante Länge.
- Ist  $J$  Jacobifeld ohne Nullstelle, so ist  $J/|J|$  parallel.

#### Aufgabe 61 – TANGENTIALE UND NORMALE JACOBIFELDER:

Sei  $J$  ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c$ . Zeigen Sie, dass sowohl Normalanteil  $J^\perp := J - g(J, c')c'$  als auch Tangentialanteil  $J^\top := g(J, c')c'$  ebenfalls Jacobifelder sind.

#### Aufgabe 62 – TANGENTIALE JACOBIFELDER:

Es seien  $J, J_1, J_2$  Jacobifelder längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c(t)$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- $g(J'_1, J_2) - g(J_1, J'_2)$  ist konstant in  $t$ .
- $g(J', c')$  ist konstant und  $g(J, c')$  affin linear in  $t$ .
- Ist  $J(0) \perp c'(0)$  und  $J'(0) \perp c'(0)$ , so ist  $J(t) \perp c'(t)$  für jedes  $t$ .
- Es sei  $\mathcal{J}$  der Raum der Jacobifelder längs  $c$ , und  $\mathcal{J}^\perp := \{J \in \mathcal{J} : J(t) \perp c'(t) \ \forall t\}$ . Dann ist  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^\perp \oplus \text{span}\{c', tc'\}$ . Insbesondere hat  $\mathcal{J}^\perp$  Dimension  $2n - 2$ .

**Aufgabe 63** – LINEARISIERUNG:

Die Linearisierung einer Differentialgleichung  $L(t, u, u') = u' - f(t, u) = 0$  ist definiert als

$$\frac{\partial}{\partial s} L(t, u + sv, (u + sv)') \Big|_{s=0}.$$

- Linearisieren Sie die quadratische Differentialgleichung  $u' - u^2 = 0$ .
- Machen Sie sich klar, dass die Jacobische Differentialgleichung eine Linearisierung der Geodätengleichung (Gleichung 25 aus der Vorlesung) ist.

**Aufgabe 64** – JACOBIFELD AUF ROTATIONSFLÄCHE:

Sei  $\varphi(t, \alpha) := (r(t) \cos \alpha, r(t) \sin \alpha, h(t))$  eine Rotationsfläche, deren Meridiane  $t \mapsto \varphi(t, \alpha)$  nach Bogenlänge parametrisiert seien. Finden Sie ein Jacobifeld längs eines Meridians. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung der Rotationsfläche aus der Jacobi-Gleichung.

**Aufgabe 65** – SCHNITTKRÜMMUNG:

Sie sind in einem Punkt  $p$  des Weltraums, den wir als eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Wie würden Sie die Schnittkrümmung  $K_p(\sigma)$  ermitteln? Geben Sie möglichst präzise an, was Sie messen müssen, und welche Rechnung Sie mit den Ergebnissen machen. (Sie können Längen messen und kennen die Bahnen von Lichtstrahlen.)

29. Vorlesung, Dienstag 9.2.10 \_\_\_\_\_

## 4. KONJUGIERTE PUNKTE

### 4.1. Kritische Punkte von $d \exp$ .

**Definition.** Sei  $c: I \rightarrow M^n$  geodätisch. Dann heißt  $t_2 \in I$  *konjugiert zu*  $t_1 \in I$  *längs*  $c$ , wenn es ein Jacobifeld  $J \neq 0$  längs  $c$  gibt mit  $J(t_1) = J(t_2) = 0$ . Die *Vielfachheit* von  $t_2$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Felder  $J$  mit  $J(t_1) = J(t_2) = 0$ .

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass Geodätische, die ein Paar konjugierter Punkte enthalten, nicht die Länge minimieren können. Dagegen minimieren Geodätische ohne konjugierte Punkte die Länge im Vergleich zu nah benachbarten Geodätischen.

*Beispiele.* 1. In  $\mathbb{S}^n$  ist längs  $c(t) = p \cos t + v \sin t$  mit  $v \in T_p \mathbb{S}^n$  das Feld  $J(t) = w \sin t$  mit  $w \in T_p \mathbb{S}^n \cap v^\perp$  ein Jacobifeld. Also ist  $-p$  zu  $p$  konjugiert, sogar unabhängig von der gewählten Geodätischen. Die Vielfachheit ist  $n - 1$ . Entsprechend sind in  $\mathbb{S}_{1/\sqrt{\kappa}}^n$  (mit Krümmung  $\kappa = \frac{1}{r^2}$ ) die Endpunkte von Geodätischen der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  konjugiert.

2. In  $\mathbb{R}^n$  oder  $T^n$  hat  $J(t) = X + tY$  höchstens eine Nullstelle. Ebenso in  $\mathbb{H}^n$  wegen  $J(t) = X \cosh t + Y \sinh t$ . Also gibt es keine konjugierten Punkte.

*Bemerkung.* Die Vielfachheit kann höchstens  $n - 1$  sein. Denn nach Lemma 16 ist der Raum der Jacobifelder mit  $J(t_1) = 0$  höchstens  $n$ -dimensional. Weil aber das Feld  $tc'$  höchstens eine Nullstelle hat, bleibt höchstens ein  $n - 1$ -dimensionaler Unterraum, der eine zweite Nullstelle hat.

Wir sagen  $(d \exp_p)$  hat  $u$  als *kritischen Punkt*, wenn  $(d \exp_p)_u : T_u T_p M = T_p M \rightarrow T_{\exp_p} M$  nicht den vollen Rang  $n$  hat.

*Beispiel.* Für  $\mathbb{S}^n$  hat  $d \exp_p$  alle  $u$  mit  $|u| = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  als kritische Punkte.

**Satz 22.** Sei  $c : [0, \tau] \rightarrow M$  geodätisch mit  $c(0) = p$ .

(i)  $\tau$  ist konjugiert zu 0 genau dann, wenn  $\exp_p$  den kritischen Punkt  $\tau u := \tau c'(0) \in T_p M$  hat.

(ii) Die Vielfachheit von  $\tau$  ist gleich der Dimension des Kerns von  $(d \exp_p)_{\tau c'(0)}$ .

*Beweis.* (i) Ist  $\tau$  konjugiert zu 0 längs  $c$ , so gibt es ein Jacobifeld  $J$  längs  $c$  mit  $J(0) = J(\tau) = 0$ . Sei  $u := c'(0)$  und  $w := J'(0)$ ; es ist  $w \neq 0$  da sonst  $J \equiv 0$  nach Lemma 16 wäre. Nach (27) lautet das Jacobifeld  $J(t) = (d \exp_p)_{tu} t w$ . Daher  $J(\tau) = 0 \iff (d \exp_p)_{\tau u}$  kritisch.

(ii) Die Mengen  $\{w : J(\tau) = (d \exp_p)_{\tau u} \tau w = 0\}$  und  $\{J \text{ Jacobifeld} : J(0) = 0, J(\tau) = 0\}$  sind isomorph über die Abbildung  $w \mapsto J$  mit  $J(0) = 0, J'(\tau) = w$ .  $\square$

Wir sagen auch  $c(t_1)$  ist konjugiert zu  $c(t_2)$ , und  $c(b)$  ist *erster konjugierter Punkt* von  $c$ , wenn nur  $b$  konjugiert zu  $a$  ist.

**Definition.** Sei  $p \in M$ . Der *konjugierte Ort*  $C(p)$  von  $p$  ist die Menge derjenigen  $q \in M$ , für die es eine Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$  gibt, deren erster konjugierter Punkt  $q$  ist.

*Beispiele.* 1.  $\mathbb{S}^n$ :  $C(p) = \{-p\}$ . Dieser Fall ist untypisch, denn im allgemeinen besteht  $C(p)$  aus Hyperflächenstücken.

2.  $T^n$  oder  $\mathbb{R}^n$ :  $C(p) = \emptyset$ . Wegen  $R \equiv 0$  sind Jacobifelder von der Form  $J(t) = E + tF$ .

4.2. **Überlagerungen.** Literatur ist beispielsweise Jänich: Topologie.

**Definition.** Seien  $E, M$  topologische Mannigfaltigkeiten. Eine (differenzierbare) Abbildung  $\pi: E \rightarrow M$  heißt (differenzierbare) *Überlagerung [covering]*, wenn für jedes  $p \in M$  eine Umgebung  $U$  existiert, deren Urbild eine disjunkte Vereinigung ist,

$$\pi^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \quad \text{mit} \quad \pi: S_\lambda \rightarrow U \text{ Homöomorphismus bzw. Diffeomorphismus,}$$

wobei  $S_\lambda$  offene Teilmenge von  $E$  ist und  $\Lambda$  beliebige Indexmenge.

Aus der Definition folgt, dass im differenzierbaren Falle  $E$  und  $M$  gleiche Dimension haben, und  $\pi^{-1}(p)$  eine diskrete Menge ist.

*Beispiele.* : 1.  $\mathbb{R}$  ist Überlagerung von  $\mathbb{S}^1$  unter  $\pi(t) := e^{it}$  mit  $\Lambda = \mathbb{Z}$ . Dieselbe Abbildung  $\pi(z) := \exp(z)$  zeigt auch, dass  $E := \mathbb{C}$  die punktierte Ebene  $\mathbb{C}^*$  überlagert.

2. Das erste Beispiel kann man zu einer *k-blättrigen* Überlagerung mit  $\Lambda = \{1, \dots, k\}$  modifizieren durch  $\pi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\pi(z) := z^k$ . Der Kreis ist damit endliche Überlagerung von sich selbst. Dieselbe Abbildung zeigt auch, dass  $\mathbb{C}^*$  sich selbst *k-fach* überlagert.

3. Ein komplizierteres Beispiel ist die zweiblättrige Überlagerung von  $\text{SO}(3)$  durch  $\mathbb{S}^3$ ; man kann  $\pi$  z.B. mithilfe von Quaternionen definieren.

4. Jede eigentlich diskontinuierliche (oder diskrete) Gruppenoperation  $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$  ist Überlagerung, z.B. ist  $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  zweiblättrige Überlagerung.

5.  $(x, y, z) \mapsto (0, y, z)$  keine Überlagerung, weil  $\pi^{-1}(p)$  nicht diskret ist.

6. Die Abbildung des zweiten Beispiels,  $\pi_k(z) := z^k$ ,  $k \geq 2$ , ist nicht Überlagerung von  $E := \mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ . Einerseits ist  $\pi^{-1}(0) = 0$ , andererseits gibt es in jeder Umgebung von  $z = 0$  jeweils  $k$  Punkte, die alle dasselbe Urbild haben. Beispielsweise gilt dies für kleine skalare Vielfaches der  $k$ -ten Einheitswurzeln. Also ist die Einschränkung von  $\pi$  auf jede Umgebung von  $0 \in E$  nicht injektiv. Um dieses Beispiel in einem verallgemeinerten Sinn als Überlagerung ansprechen zu können, führen Funktionentheoretiker den Begriff der *verzweigten Überlagerung* ein.

Die wichtigste Eigenschaft von Überlagerungen ist, dass man Wege von  $M$  nach  $E$  hochheben kann:

**Satz 23.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  Überlagerung und  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $c(0) = p$ . Ist  $q \in E$  ein Punkt mit  $\pi(q) = p$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve  $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\tilde{c}(0) = q$  und  $\pi \circ \tilde{c} = c$ .

Die Kurve  $\tilde{c}$  nennt man auch einen *Lift* von  $c$ .

*Beweis.* (i) Eindeutigkeit: Seien  $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow E$  zwei Kurven mit  $\pi(c_i) = c$  und  $c_i(0) = q$ . Dann betrachten wir  $I := \{t : c_1(t) = c_2(t)\} \subset [0, 1]$ . Wir zeigen  $I$  und  $[0, 1] \setminus I$  sind offen. Sei  $t \in I$ ,

so ist  $c_1(t) = c_2(t) \in S_\lambda$ . Wegen Stetigkeit ist  $c_i(s) \in S_\lambda$ , für eine kleine Umgebung von  $t$ . Weil  $\pi: S_\lambda \rightarrow U$  Homöomorphismus ist, folgt  $c_1(s) = c_2(s)$  in dieser Umgebung. Andererseits liegen für  $t \in [0, 1] \setminus I$  zunächst  $c_1(t)$  und  $c_2(t)$  in verschiedenen Blättern  $S_\lambda \neq S_\mu$ , und ebenso für eine offene Umgebung von  $t$ .

(ii) Existenz: Betrachten wir den Spezialfall, dass  $c([0, 1])$  in nur einem  $U \subset M$  enthalten ist. Liegt  $q \in S_\lambda$ , so ist  $\pi: S_\lambda \rightarrow U$  bijektiv, und daher ist  $\tilde{c} := \pi^{-1} \circ c$  ein eindeutiger Lift nach  $S_\lambda \subset E$ . Wegen  $\pi^{-1}$  stetig ist auch  $\tilde{c}$  stetig.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Weil  $I$  kompakt ist und  $M$  von den offenen Mengen  $U$  überdeckt wird, gibt es eine endliche Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , so dass  $c|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset U^i \subset M$ . Zunächst liegt  $q = c(0) \in U^1$ . Wie im Spezialfall erhalten wir einen eindeutigen Lift  $\tilde{c}|_{[0, t_1]} \subset S_\lambda^1$ . Ist  $\tilde{c}|_{[0, t_i]}$  schon konstruiert, so setzen wir wie im Spezialfall diese Kurve zu  $\tilde{c}|_{[0, t_{i+1}]}$  stetig fort, indem wir in dasjenige  $S_\lambda^{i+1}$  hochheben, das den Endpunkt  $c(t_i)$  enthält.  $\square$

Auch Homotopien  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  lassen sich nach  $E$  liften. Der Beweis ist fast genauso.

**4.3. Konjugierte Punkte und Kürzeste.** Geodätische ohne konjugierte Punkte minimieren die Länge:

**Lemma 24.** *Sei  $c: [0, b] \rightarrow M$  Geodätische ohne konjugierte Punkte, und  $h_s(t)$  eine eigentliche Variation von  $c$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $L(c) \leq L(h_s)$  gilt für alle  $|s| < \varepsilon$ . Zusatz: Ist  $h_s$  keine Reparametrisierung von  $c$ , so gilt dies sogar mit " $<$ ".*

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus dem Beweis von Satz II,31 folgendermaßen. Es sei  $\sigma(t) = tu \in T_p M$  für  $t \in [0, b]$  der Strahl mit  $\exp_p(\sigma(t)) = c(t)$ . Nach Voraussetzung hat  $d\exp_p$  den vollen Rang  $n$  auf  $\sigma$ .

Die Menge der Punkte in  $T_p M$ , für die  $d\exp_p$  Rang  $n$  hat, ist offen. Daher enthält sie eine Umgebung  $U$  des Strahles  $\sigma$ . Da  $[0, b]$  kompakt ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für  $|s| < \varepsilon$  die Kurven  $t \mapsto h_s(t)$  in  $\exp_p(U)$  liegen.

Weil  $U$  die Menge  $\exp_p(U)$  überlagert, kann man  $h_s$  eindeutig liften zu einer Kurve  $\tilde{h}_s \subset U$  (Satz 23). Nach der Bemerkung im Anschluss zu Satz II,31 ist  $L(h_s) = L(\exp_p \tilde{h}_s) \geq L(\exp_p \sigma) = L(c)$ , wobei  $>$  gilt, wenn  $h_s$  nicht den Strahl  $\sigma$  reparametrisiert.  $\square$

Wir geben nun noch eine zusammenfassende Aussage an, die man durch eine genauere Untersuchung der zweiten Variation erhält:

**Satz 25.** *Es sei  $c: [0, b] \rightarrow M$  Geodätische. Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $c([0, b]) \subset M$ , so dass  $c$  Kürzeste bezüglich Vergleichskurven in  $U$  ist, genau dann, wenn  $c$  keine konjugierten Punkte im Innern hat.*

Dabei sollen die Vergleichskurven nach  $T_{c(0)}M$  liften und dort denselben Endpunkt wie der Lift von  $c$  haben.

Hat eine Geodätische also einen konjugierten Punkt im Innern, so findet man kürzere Kurven in jeder Umgebung. Hat sie keinen konjugierten Punkt, so ist sie Kürzeste wenigstens im Vergleich zu nah benachbarten Kurven.

30. Vorlesung, Mittwoch 10.2.10 \_\_\_\_\_

**4.4. Konjugierte Punkte unter Krümmungsschranken.** Im Falle negativer Krümmung gilt:

**Satz 26.** *Sei  $M$  vollständige Mannigfaltigkeit mit überall  $K_p(\sigma) \leq 0$ . Für jedes  $p \in M$  ist der konjugierte Ort leer,  $C(p) = \emptyset$  und  $\exp_p: T_pM \rightarrow M$  lokaler Diffeomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $c: [0, \infty) \rightarrow M$  geodätisch und  $J$  ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = 0$ . Wir zeigen: Ist  $J(t) = 0$  für ein  $t > 0$ , so folgt  $J \equiv 0$ . Also gibt es keine konjugierten Punkte, und  $\exp$  hat nach Satz 22 keine kritischen Punkte.

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\|J\|^2) &= \frac{d}{dt} g(J', J) = g(J', J') + g(J'', J) = \|J'\|^2 - g(R(J, c')c', J) \\ &= \|J'\|^2 - \underbrace{K(J, c')}_{\geq 0 \text{ n.V.}} \underbrace{(\|c'\|^2 \|J\|^2 - g(c', J)^2)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

ist  $\|J\|^2$  konvex. Da  $\|J(0)\|^2 = 0$  und  $\|J\|^2 \geq 0$ , folgt also aus  $\|J(t)\|^2 = 0$  sogar  $J|_{[0,t]} \equiv 0$ . Insbesondere gilt  $0 = J(0) = J'(0)$  und daher laut Lemma 16 sogar  $J \equiv 0$ .  $\square$

Die Sphäre  $\mathbb{S}_{1/\sqrt{\kappa}}^n$  hat einerseits positive Krümmung  $\kappa$  und andererseits hat jede Geodätische bei Länge  $L = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  den ersten konjugierten Punkt. Wir geben ohne Beweis noch eine Aussage an, die man als ein Vergleichsprinzip bei variabler positiver Krümmung verstehen kann:

**Satz 27.** (i) *Ist  $K_p(\sigma) \leq \kappa$  für  $\kappa > 0$ , so ist jede Geodätische  $c$  mit Länge  $L(c) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  frei von konjugierten Punkten.*

(ii) *Ist  $0 < \lambda \leq K_p(\sigma)$ , so besitzt jede Geodätische  $c$  der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq L(c)$  einen konjugierten Punkt.*

#### 4.5. Satz von Hadamard.

**Satz 28** (Hadamard ( $n = 2$ ), Cartan). *Sei  $M$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $K_p(\sigma) \leq 0$  für alle  $p \in M$ ,  $\sigma \subset T_pM$  Ebenen.*

(i)  *$\exp_p: \mathbb{R}^n = T_pM \rightarrow M$  ist differenzierbare Überlagerung für jedes  $p \in M$ .*

(ii) *Ist speziell  $M$  einfach zusammenhängend, so ist  $M$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .*

*Beispiele.* 1. Für den Torus  $T^n$  ist  $\exp_p : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  Überlagerung, sogar isometrisch.  
 2. Es gibt viele Flächen mit negativer Krümmung. Ein Beispiel: Wir können vier rechtwinklige Sechsecke  $\subset \mathbb{H}^2$  so verkleben, dass wir eine Fläche vom Geschlecht 2 erhalten. Nach Konstruktion wird diese Fläche von  $\mathbb{H}^2$  isometrisch überlagert; die Überlagerung durch  $\mathbb{R}^2$  ist nur lokaler Diffeomorphismus. Das gleiche gilt für beliebige Quotienten unter diskreten Gruppenoperationen auf  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{H}^n$ .

Der Beweis beruht auf folgendem Lemma:

**Lemma 29.** *Sei  $\varphi : (E, h) \rightarrow (M, g)$  lokale Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Ist  $E$  vollständig, so ist  $\varphi$  eine isometrische Überlagerung (insbesondere ist auch  $M$  vollständig).*

*Beweis.* Die Abbildung  $\varphi$  ist surjektiv, denn für eine lokale Isometrie hat  $d\varphi$  Rang  $n$ , d.h.  $\varphi$  ist lokaler Diffeomorphismus. Also ist  $\varphi(E)$  offen in  $M$  und wegen der Stetigkeit und Isometrie von  $\varphi$  auch abgeschlossen. Es folgt  $\varphi(E) = M$ .

Sei  $p \in M$  und  $U(p) = \exp_p(B_r) = \{q \in M : \text{dist}(p, q) < r\}$  eine Umgebung, auf der  $\exp$  injektiv ist, wobei  $r = r(p)$ . Wir schreiben nun  $\varphi^{-1}(p) =: \{p_\lambda \in E : \lambda \in \Lambda\}$  mit  $\Lambda \neq \emptyset$  und setzen

$$U(p_\lambda) := \{q \in E : \text{dist}(p_\lambda, q) < r\}.$$

Zu zeigen ist:

- (i)  $\varphi : U(p_\lambda) \rightarrow U$  Diffeomorphismus;
- (ii)  $\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U(p_\lambda)$  und
- (iii) diese Vereinigung ist disjunkt.

(i) Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_\lambda}E \supset B_r(0) & \xrightarrow{\exp_{p_\lambda}} & U(p_\lambda) \subset E \\ \downarrow d\varphi & & \varphi \downarrow \\ T_pM \supset B_r(0) & \xrightarrow{\exp_p} & U(p) \subset M \end{array}$$

Wegen der Vollständigkeit von  $E$  ist  $\exp_{p_\lambda}$  definiert (Korollar II,35).

Wir behaupten zuerst, dass das Diagramm kommutiert. Weil die Exponentialabbildungen radial isometrisch sind und  $\varphi$  lokale Isometrie, wird ein mit Einheitsgeschwindigkeit parametrisierter Strahl in  $B_r(0) \subset E_{p_\lambda}$  in Richtung  $v$  auf beiden Wegen des Diagramms auf eine mit Einheitsgeschwindigkeit parametrisierte radiale Geodätische in  $U(p) \subset M$  in Richtung  $d\varphi(v)$  abgebildet.

Wir behaupten nun, dass alle Abbildungen Diffeomorphismen sind. Der Satz von Hopf-Rinow zeigt, dass  $\exp_{p_\lambda}$  surjektiv ist. Also ist diese Abbildung Diffeomorphismus. Die



Abbildung  $\exp_p$  ist nach Annahme Diffeomorphismus und  $d\varphi$  ist Diffeomorphismus, weil  $\varphi$  lokale Isometrie ist. Wegen der Kommutativität ist damit auch  $\varphi = \exp_p \circ d\varphi \circ \exp_{p_\lambda}^{-1}$  Diffeomorphismus.

(ii) Jeder Punkt  $q \in U(p_\lambda)$  wird mit  $p_\lambda$  durch eine radiale Geodätische der Länge  $< r$  verbunden; also hat auch  $\varphi(q)$  Abstand  $< r$  zu  $p$ . Es ist also  $\bigcup U(p_\lambda) \subset \varphi^{-1}(U)$ . Für die umgekehrte Inklusion müssen wir zeigen, dass jedes  $q \in \varphi^{-1}(U)$  Distanz  $< r$  zu einem  $p_\lambda$  hat. Ohne Vollständigkeit würde dies nicht stimmen. Es gibt eine eindeutige bogenlängenparametrisierte radiale Kürzeste  $c: [0, L] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $\varphi(q)$  mit  $L := \text{dist}(p, \varphi(q))$ . Weil radiale Geodätische aufeinander abgebildet werden, liftet die Kürzeste zu einer Geodätischen  $\tilde{c}$  durch  $q$ , die ebenfalls radial ist, so dass  $\tilde{c}$  ein  $p_\lambda$  als den von  $q$  verschiedenen Endpunkt hat. Weil  $\varphi$  radial isometrisch ist, gilt dann  $\text{dist}(p_\lambda, q) < r$  und daher  $q \in U(p_\lambda)$ .

(iii) Wenn die Vereinigung nicht disjunkt ist, so gibt es einen Punkt  $q \in E$  mit  $\text{dist}(q, p_\lambda) < r$  und  $\text{dist}(q, p_\mu) < r$  für  $\lambda \neq \mu$ . Es reicht daher zu zeigen:  $\text{dist}(p_\lambda, p_\mu) \geq 2r$  für  $\lambda \neq \mu$ . Wegen der Vollständigkeit von  $E$  existiert eine Kürzeste  $c$  von  $p_\lambda$  nach  $p_\mu$ . Dann ist  $\gamma := \varphi \circ c$  eine geodätische Schleife durch  $p$ . Weil  $\exp_p$  auf  $B_r$  injektiv ist, enthält  $\exp^{-1}(\gamma \cap \exp_p(B_r))$  wenigstens zwei Intervalle mit Bogenlänge  $r$ . Also ist  $2r \leq L(\gamma)$ , und daher auch  $2r \leq L(c) = \text{dist}(p_\lambda, p_\mu)$ .  $\square$

*Beweis von Cartan-Hadamard.*  $M$  ist vollständig, daher ist  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  definiert, und nach Satz 26 lokaler Diffeomorphismus. Also wird  $(E := T_p M, h)$  zur Riemannschen Mannigfaltigkeit, indem wir  $h_u(v, w) := g((d\exp_p)_u v, (d\exp_p)_u w)$  setzen;  $\exp_p: (T_p M, h) \rightarrow (M, g)$  ist dann lokale Isometrie.

Um Lemma 29 anwenden zu können, zeigen wir nun:  $(T_p M, h)$  ist vollständig. Ursprungsstrahlen von  $T_p M$  bildet  $\exp_p$  auf Geodätische durch  $p$  ab. Da  $\exp_p$  lokale Isometrie ist, sind die Ursprungsstrahlen in  $T_p M$  bzgl.  $h$  geodätisch. Weiterhin sind sie nach Bogenlänge parametrisiert und haben daher unendliche  $h$ -Länge. Also ist  $\exp_0: \mathbb{R}^n \rightarrow (T_p M, h)$  definiert; nach einer Übung folgt daraus bereits die Vollständigkeit von  $(T_p M, h)$ , d.h.  $\exp_v: \mathbb{R}^n \rightarrow (T_p M, h)$  definiert  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ .

Lemma 29 gibt dann (i) und (ii) ist Spezialfall davon.  $\square$

Der Beweis zeigt etwas mehr: Ein Pol  $p$  einer vollständigen Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Punkt, für den alle geodätischen Strahlen durch  $p$  keine konjugierten Punkte haben. Der Beweis zeigt, dass wenn ein Pol existiert, so ist  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung, und  $M$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , wenn  $\pi_1(M) = 0$ . Beispielsweise ist der Ursprung ein Pol für das Rotationsparaboloid, und tatsächlich ist das Paraboloid diffeomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

Die universelle Überlagerung von  $\mathbb{S}^n$  ist wieder  $\mathbb{S}^n$ , also nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ . Wir können daraus schließen:

**Korollar 30.**  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$ , besitzt keine Metrik mit Krümmung  $K \leq 0$ .

**4.6. Kurzer Ausblick.** Wir haben gesehen, dass sich positiv und negativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten ganz verschieden verhalten: Wenn ihre Fundamentalgruppe verschwindet, sind die ersten kompakt (Myers), die zweiten diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (Hadamard).

Wenn wir Mannigfaltigkeiten betrachten, deren Fundamentalgruppe nicht unbedingt verschwindet, bleiben Unterschiede bestehen: Die Fundamentalgruppe von Mannigfaltigkeiten mit positiver (von 0 weg beschränkter) Krümmung ist endlich, während bei negativer Krümmung diese Einschränkung nicht besteht. Es gibt daher viel mehr Quotientenmannigfaltigkeiten von negativer (genauer: nicht-positiver) Krümmung.

Es ist ein interessantes Problem, festzustellen, welche Gruppen auf Mannigfaltigkeiten operieren können. Der einfachste zu untersuchende Fall ist konstante Krümmung  $K \equiv -1, 0$ , oder  $1$ . Im Falle von Krümmung  $0$  sind dies Tori oder andere Quotienten, die durch Division von  $\mathbb{R}^n$  durch ein Gitter  $\Gamma^k := \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$  entstehen. Im Falle von  $K \equiv 1$  hat J. Wolf die Klassifikation geleistet. Der Fall  $K \equiv -1$  ist so reichhaltig, dass die Analyse viel schwerer ist. Bei Dimension  $n = 2$  werden die möglichen Flächen durch den Teichmüllerraum parametrisiert. Im Falle  $n = 3$  beschreibt Thurston's Geometrisierungsprogramm die möglichen Quotienten; Perelman hat den Beweis dazu geliefert. Höhere Dimensionen sind nicht mit den gleichen Methoden behandelbar.

Ende der Vorlesung \_\_\_\_\_

## INDEX

- Überdeckung, 2, 23  
Überlagerung, 109
- Ableitung, kovariante, 30, 78  
Abzählbarkeitsaxiom, zweites, 1, 23  
Atlas, 2
- Basisfelder, 35  
Bianchi-Identität, 80  
Bogenlänge, 17  
Bonnet, Pierre Ossian (1819-1892), 97
- Cayley-Abbildung, 69  
Christoffel, Elwin Bruno (1829-1900), 29  
Christoffel-Symbole, 29, 35
- Derivation, 7, 11  
Diffeomorphismus, 4  
Differential, 9  
differenzierbar, 4  
differenzierbare Struktur, 2  
diskrete Operation, 22  
Durchmesser, 97
- eigentlich diskontinuierlich (Operation), 22  
Einbettung, 10  
Energie, 51  
Euklidischer Raum, 17  
Exponentialabbildung, 45, 63  
Exponentialabbildung, Differential, 108
- Fläche, 17  
flach, 78, 84  
Foucault (1819-1868), 27  
Funktionskeime, 6
- Gauß-Gleichung, 78  
Gauß-Lemma, 54  
Geodätische, vii, 31, 43  
geodätische Vollständigkeit, 63  
Gitter, 23  
Gruppenoperation, 21
- Hauptachsentransformation, 48  
Hauptteil, 10
- Hauptteil (Tangentialvektor), 5  
Hausdorffsch, 1  
Hilbert, David (1862–1943), 64, 66  
Hopf, Heinz (1894–1971), 64  
Hopf-Rinow, Satz von, 64, 98  
Horokreis, 73  
Horosphären, 73  
hyperbolischer Raum, 18, 66, 85
- Igel, 11  
Immersion, 9  
Index, 16  
innere Geometrie, vii  
Isometrie, 20  
Isometriegruppe, 21
- Jacobi-Gleichung, 100  
Jacobi-Identität, 13, 81  
Jacobifeld, 100
- Kürzeste, 53, 64  
Karte, 1  
Kartenwechsel, 2  
Kommutator, 13  
konform, 18  
konjugierte Ort, 108  
konjugierter Punkt, 107  
Kontraktion, 88  
kontravariant, 90  
Koszul-Formel, 40  
kovariant, 90  
Krümmung (Gauß), 76  
Krümmung, konstante, 84  
Krümmungstensor, 78, 83, 89, 96
- Länge, 17  
Levi-Civita, Tullio (1873–1941), 39  
Levi-Civita-Zusammenhang, 40  
lichtartig, 19  
Lichtkegel, 19  
Lie, Sophus (1842-1899), 7, 11, 13  
Lie-Ableitung, 7, 11  
Lie-Algebra, 14  
Lie-Klammer, 13, 33, 38, 78

- Lift, 109
- Linienfeld, 24
- lokal euklidisch, 1
- lokale Koordinaten, 1
- Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 19
- Lorentz-Raum, 19
  
- Möbius, August Ferdinand (1790–1868), 67
- Möbiustransformation, 67
- Mannigfaltigkeit, 3, 16
- Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, 84
- Mannigfaltigkeit, differenzierbare, 3
- Mannigfaltigkeit, Riemannsche, 16
- Mannigfaltigkeit, semi-Riemannsche, 16
- Mannigfaltigkeit, topologische, 2
- Metrik, 16, 62
- Metrik, Riemannsche, 16, 23
- Metrik, semi-Riemannsche, 16, 89
- Minkowski-Raum, 17
- multilinear, 88
- Myers, 97
  
- Nash, John (geb. 1928), 21
- normaler Ball, 59
- Normalkoordinaten, 47
  
- Operation (einer Gruppe), 21
- parallel, 27, 37, 91
- Parallelverschiebung, 27, 86
- Poincaré, Henri (1854-1912), 19
- Poincaré-Modell, 19, 74
- Pol, 113
- projektive Räume, 3, 83, 97
  
- radiale Geodätische, 60
- raumartig, 19
- Raumform, 84
- Relativitätstheorie, vi
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard  
(1826–1866), 16, 19
- Rinow, Willi (1907–1979), 64
  
- Schnittkrümmung, 83
- semi-Riemannscher Zusammenhang, 40
- Sphäre, 3, 85, 97
- Standardbasis, 6
- Tangentialbündel, 8
- Tangentialraum, 5
- Tangentialvektor, 19
- Tensor, 88
- Tensorfeld, 89
- Tensorprodukt, 88
- theorema egregium, 77
- Topologie, vii
- topologischer Raum, 1, 62
- Torus, flacher, viii, 53, 97
- total geodätisch, 71
  
- Untermannigfaltigkeit, 10
  
- Variation, 48, 100
- Variation, erste, 49, 52
- Variation, gebrochene, 52
- Variation, zweite, 95, 98
- Vektorfeld, 10, 27
- vollständig, 63, 97
- Volumen, 18
  
- Weingarten-Abbildung, 77
- Winkel, 17
  
- zeitartig, 19
- Zerlegung der Eins, 23
- Zusammenhang, 35
- Zusammenhang, affiner, 35
- Zusammenhang, Levi-Civita, 39
- Zusammenhang, symmetrischer, 38