# Minitest XII

Ausgehend von einer Stichprobe $x_1$, . . . , $x_n$ einer $b(1,p)$-Verteilung vom Umfang $n = 10$ soll zwischen den beiden Hypothesen

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{und} \quad H_1 : p = 0.8$$

entschieden werden. Dazu wird der Test

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^n x_i \geq 9, \\ 0 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^n x_i < 9, \end{cases}$$

verwendet.

Ist dieser Test ein Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ ?

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen, so ist $\sum_{i=1}^n X_i$ $b(n,p)$-verteilt. Daher ist die Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art des obigen Testes gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{p=0.5}\left[\varphi(X_1,\ldots,X_{10})=1\right] &= \mathbf{P}_{p=0.5}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 9\right] \\
&= \mathbf{P}_{p=0.5}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i = 9\right] + \mathbf{P}_{p=0.5}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i = 10\right] \\
&= \binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-9} + \binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-10} \\
&= 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.01,
\end{aligned}
$$

d.h. der Test ist ein Test zum Niveau $\alpha = 0.05$.