Minitest XI

a) Sei X eine reelle Zufallsvariable mit $0 < V(X) < \infty$. Sei

$$Y = \frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{V(X)}}.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvaraiblen mit $0 < V(X_1) < \infty$. Begründen Sie:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n X_i)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}X_1 \right).$$

a) Nach den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz gilt:

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\left(\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{V(X)}}\right) = \frac{\mathbf{E}\,(X - \mathbf{E}X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{\mathbf{E}X - \mathbf{E}X}{\sqrt{V(X)}} = 0$$

und

$$V(Y) = V\left(\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{V(X)}}\right) = \frac{V(X - \mathbf{E}X)}{V(X)} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$

b) Unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit und identischen Verteiltheit der Zufallsvariablen folgt mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n X_i)}} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n V(X_i)}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mathbf{E}X_1}{\sqrt{n \cdot V(X_1)}} \\
&= \frac{n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}X_1\right)}{\sqrt{n \cdot V(X_1)}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}X_1\right).
\end{aligned}
$$