14 Oberflächenintegrale und Integralsätze

Nachdem wir im vergangenen Kapitel gesehen haben, wie man das Volumen eines dreidimensionalen Körpers (z.B. das Volumen einer Kugel) mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen kann, wenden wir uns nun den Flächeninhalten gekrümmter Flächen zu (wie z.B. der Oberfläche einer Kugel), für die wir einen geeigneten Integralbegriff entwickeln.

14.1 Flächen, Tangenten und Normalen

Wir haben früher Kurven als Bilder von Intervallen bzgl. stetiger Abbildungen beschrieben. Ganz analog definieren wir nun Flächenstücke als Bilder ebener Bereiche bzgl. geeigneter Abbildungen.

Definition 14.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Menge, und ihre Abschließung $\overline{D}$ sei Jordan-messbar. Weiter sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion mit*

$$\operatorname{rang} F'(x_1, x_2) = 2 \quad \textit{für alle } (x_1, x_2) \in D. \tag{14.1}$$

Dann heißt das Bild von $\overline{D}$ unter F, d.h. die Menge

$$\mathcal{F} := \{F(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in D\} \tag{14.2}$$

ein Flächenstück *im $\mathbb{R}^3$ und die Abbildung $F : \overline{D} \to \mathcal{F}$ heißt eine* Parameterdarstellung des Flächenstücks *$\mathcal{F}$ oder kurz eine* Fläche.

Genau wie bei Wegen und Kurven unterscheiden wir sorgfältig zwischen der Abbildung F und ihrem Bild $\mathcal{F}$. Offenbar kann es für ein- und dasselbe Flächenstück $\mathcal{F}$ verschiedene Parametrisierungen geben.

Wichtige Vereinbarung. Wir haben früher die Differenzierbarkeit einer Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^3$ nur für offene Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ erklärt. Die stetige Differenzierbarkeit von $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ haben wir wie folgt zu verstehen: *Die Funktion F läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion $F : G \to \mathbb{R}^3$ auf eine offene Menge $G \supset \overline{D}$ fortsetzen.* Diese Menge G ist für die Definition des Flächenstücks offenbar unerheblich. Wir möchten jedoch auch in den Randpunkten von D die partiellen Ableitungen F_{x_1} und F_{x_2} bilden können und verlangen daher, dass sich F auf eine offene Umgebung G von $\overline{D}$ stetig differenzierbar fortsetzen läßt. ■

Die Rangbedingung (14.1) wird nur für Punkte aus D gefordert; auf dem Rand $\partial D = \overline{D} \backslash D$ muss sie nicht erfüllt sein. Mit

$$F(x_1, x_2) = \big(F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ F_3(x_1, x_2)\big)^T$$

lautet die Rangbedingung (14.1)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 2 \tag{14.3}$$

in allen Punkten von D.

Beispiel 1 (Kugeloberfliche) Sei $D = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $r > 0$. Dann ist $\overline{D}$ das Rechteck $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Sei weiter

$$F(u, v) = (r \cos u \cos v,\ r \sin u \cos v,\ r \sin v)$$

für $(u, v) \in \overline{D}$. Dann ist F stetig differenzierbar auf $\overline{D}$ (und sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$), und die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

hat für alle $(u, v) \in D$ den Rang 2. Das zugehörige Flächenstück $\mathcal{F}$ ist die Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius r. ■

Beispiel 2 (Funktionsgraphen) Sei $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) := \big(u, v,\ f(u, v)\big)^T.$$

Dann ist auch F stetig differenzierbar auf $\overline{D}$, und die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

von F hat offenbar den Rang 2. Das durch F definierte Flächenstück ist gerade der Graph von f. Mit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 1\}$ und $f(u, v) = uv$ erhält man beispielsweise eine Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid). ■

Beispiel 3 (Ebenen) Seien $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ linear unabhängige Vektoren und sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Auf $\overline{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ hat die Funktion $F(u, v) = ua + vb + x_0$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit von a und b den Rang 2 hat. Das zugehörige Flächenstück ist ein Teil der durch a und b aufgespannten und durch x_0 verlaufenden Ebene. ■

Sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Flächenstücks $\mathcal{F}$. Ist durch $X = (X_1, X_2)^T : [a,b] \to \overline{D}$ ein stetig differenzierbarer Weg in $\overline{D}$ gegeben, so ist

$$Y : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \quad Y(t) = F\big(X(t)\big)$$

ein stetig differenzierbarer Weg, der komplett in $\mathcal{F}$ verläuft. Für $t_0 \in [a,b]$ wird die Richtung der Tangente an den Weg Y im Punkt $Y(t_0) = F\big(X(t_0)\big)$ beschrieben durch den Vektor

$$\dot{Y}(t_0) = F_u\big(X(t_0)\big)\dot{X}_1(t_0) + F_v\big(X(t_0)\big)\dot{X}_2(t_0) \tag{14.4}$$

(Kettenregel!) mit

$$F_u\big(X(t_0)\big) = \frac{\partial F}{\partial u}\big(X(t_0)\big) = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial u}\big(X(t_0)\big), \frac{\partial F_2}{\partial u}\big(X(t_0)\big), \frac{\partial F_3}{\partial u}\big(X(t_0)\big)\Big)$$

und

$$F_v\big(X(t_0)\big) = \frac{\partial F}{\partial v}\big(X(t_0)\big) = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial v}\big(X(t_0)\big), \frac{\partial F_2}{\partial v}\big(X(t_0)\big), \frac{\partial F_3}{\partial v}\big(X(t_0)\big)\Big).$$

Die Rangbedingung (14.1) besagt gerade, dass die beiden Vektoren $F_u\big(X(t_0)\big)$ und $F_v\big(X(t_0)\big)$ für alle Punkte $X(t_0) \in D$ linear unabhängig sind. Wir schreiben $X(t_0) = (u_0, v_0)$. Betrachten wir alle Wege X durch den Punkt (u_0, v_0), so können in (14.4) die Ableitungen $\dot{X}_1(t_0)$ und $\dot{X}_2(t_0)$ beliebige Werte annehmen. Die beiden Vektoren $F_u(u_0, v_0)$ und $F_v(u_0, v_0)$ spannen also die komplette *Tangentialebene an die Fläche F im Punkt $F(u_0, v_0)$* auf. Eine Beschreibung der Tangentialebene in Parameterform lautet daher

$$\{F(u_0, v_0) + \lambda F_u(u_0, v_0) + \mu F_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{14.5}$$

Den *Normalenvektor an die Fläche $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ im Punkt $F(u,v)$* mit $(u,v) \in D$ erklären wir durch das Vektorprodukt

$$N(u,v) := \frac{F_u(u,v) \times F_v(u,v)}{\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|}\,. \tag{14.6}$$

(Man beachte, dass $F_u(u,v) \times F_v(u,v) \neq 0$ ist, da beide Vektoren linear unabhängig sind.) Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts wissen wir, dass der Vektor $N(u,v)$ senkrecht auf $F_u(u,v)$ und $F_v(u,v)$ (und damit auf der gesamten Tangentialebene (14.5)) steht. Außerdem hat er die Länge 1, so dass man auch vom *Normaleneinheitsvektor* spricht.

Es stellt sich die Frage, inwieweit die eingeführten Begriffe (Tangential- und Normalenvektoren) von der Parametrisierung F oder nur vom Flächenstück $\mathcal{F}$ abhängen. Dazu zunächst eine Definition.

Definition 14.2 a) *Seien D, E offen in $\mathbb{R}^2$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \overline{D} \to \overline{E}$ heißt* Diffeomorphismus*, wenn φ und die Umkehrabbildung φ^{-1} stetig differenzierbar sind.*

b) *Zwei Parameterdarstellungen $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ und $G : \overline{E} \to \mathbb{R}^3$ heißen* äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : \overline{D} \to \overline{E}$ gibt mit $F = G \circ \varphi$ und $\det \varphi' > 0$ auf $\overline{D}$.*

Sind F und G äquivalent, so sagt man auch, dass sie durch eine Parametertransformation φ auseinander hervorgehen.

Es gilt nun:

> *Bei äquivalenten Parametertransformationen bleiben die wesentlichen Flächengrößen und Flächeneigenschaften (wie die Tangentialebenen und Normalenvektoren) unverändert.*

Anschaulich ist klar, dass jedes Flächenstück in jedem Punkt genau einen Tangentialraum, aber zwei Normaleneinheitsvektoren (nach „oben“ und nach „unten“) besitzt. Ist $F = G \circ \varphi$, so liefern F und G den gleichen Normalenvektor, wenn $\det \varphi' > 0$, und sie liefern entgegengesetzte Normalenvektoren, wenn $\det \varphi' < 0$. In letzterem Fall sagt man auch, dass die *Orientierung* von F gewechselt wird.

Beispiel 4 Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Dann ist

$$\begin{aligned} F_u(u,v) &= (-r \sin u \cos v,\ r \cos u \cos v, 0)^T, \\ F_v(u,v) &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)^T, \\ F_u(u,v) \times F_v(u,v) &= (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v), \\ \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| &= r^2 \cos v \end{aligned}$$

und damit

$$N(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

für alle Punkte $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. ∎

Beispiel 5 Sind D, f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$F_u = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\big)^T, \qquad F_v = \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\big)^T,$$

$$F_u \times F_v = \big(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\big), \qquad \|F_u \times F_v\| = \sqrt{\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2 + 1}$$

und damit schließlich

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2 + 1}} \big(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\big). \qquad ∎$$

Beispiel 6 Sei $D = E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Die Parametrisierungen

$$F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, \quad F(u,v) = (u, v, uv)^T$$

und

$$G : \overline{E} \to \mathbb{R}^3, \quad G(u,v) = (u, -v, -uv)^T$$

liefern das gleiche Flächenstück. Wir bestimmen die Normalenvektoren im Punkt $F(0,0) = G(0,0) = (0,0,0)^T$. Zunächst ist

$$F_u(u,v) = (1,0,v)^T, \quad F_v(u,v) = (0,1,u)^T,$$

also

$$F_u(u,v) \times F_v(u,v) = (-v,-u,1)^T \text{ und } F_u(0,0) \times F_v(0,0) = (0,0,1)^T.$$

Andererseits ist

$$G_u(u,v) = (1,0,-v)^T, \quad G_v(u,v) = (0,-1,-u)^T$$

und damit

$$G_u(u,v) \times G_v(u,v) = (-v,u,-1)^T \text{ und } G_u(0,0) \times G_v(0,0) = (0,0,-1)^T.$$

Bei Verwendung von F erhalten wir also $(0,0,1)^T$ als Normaleneinheitsvektor im Punkt $(0,0,0)^T$ an die Sattelfläche, und bei Verwendung von G den Vektor $(0,0,-1)^T$. Man beachte, dass zwar F und G durch den Diffeomorphismus

$$\varphi : \overline{D} \to \vec{E}, \ (u,v)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u,-v)^T$$

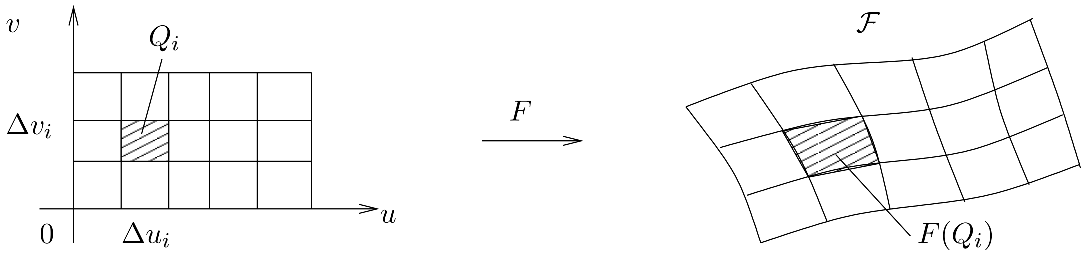
auseinander hervorgehen, dass aber

$$\det \varphi'(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

ist. Also sind F und G nicht zueinander äquivalent. ∎

14.2 Flächenintegrale

Wir wollen nun Flächenintegrale definieren. Als Motivation gehen wir ähnlich vor wie bei der „Herleitung“ der Substitutionsregel in Abschnitt 13.7. Sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung eines Flächenstückes $\mathcal{F}$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $\overline{D}$ ein achsenparalleles Rechteck in der uv-Ebene ist. Das Rechteck $\overline{D}$ sei in Teilrechtecke $Q_1, \ldots, Q_m$ zerlegt. Ihre Bilder $F(Q_1), \ldots, F(Q_m)$ nennen wir *Maschen*. Aus diesen Maschen setzt sich das Flächenstück $\mathcal{F}$ zusammen.



Ist die Rechteckzerlegung von $\overline{D}$ fein genug, so haben die Maschen nahezu die Gestalt eines Parallelogramms. Ist Q_i ein Teilrechteck in $\overline{D}$ mit den Seitenlängen Δu_i und Δv_i und ist (u_i, v_i) der linke untere Eckpunkt von Q_i, so ist die Masche $F(Q_i)$ ungefähr gleich dem Parallelogramm, das von den Vektoren

$$F(u_i + \Delta u_i, v_i) - F(u_i, v_i) \text{ und } F(u_i, v_i + \Delta v_i) - F(u_i, v_i)$$

aufgespannt wird. Diese Vektoren sind nach Definition der partiellen Ableitungen ungefähr gleich

$$F_u(u_i, v_i)\Delta u_i \quad \text{und} \quad F_v(u_i, v_i)\Delta v_i.$$

Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt gleich der Länge des Vektorprodukts dieser Vektoren ist, also gleich der Länge von

$$\Delta\sigma_i := \big(F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\big)\ \Delta u_i \Delta v_i.$$

Man kann daher $\|\Delta\sigma_i\|$ als ungefähren Flächeninhalt der Masche $F(Q_i)$ ansehen und

$$\sum_{i=1}^{m} \|\Delta\sigma_i\| = \sum_{i=1}^{m} \|F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\|\ \Delta u_i \Delta v_i \tag{14.7}$$

als Näherung für den Flächeninhalt des Flächenstückes $\mathcal{F}$. Ist D kein Rechteck, so schöpfen wir $\overline{D}$ von innen durch rechteckzerlegte Bereiche aus. Lassen wir auf der rechten Seite von (14.7) die Zerlegung immer feiner werden, d.h. lassen wir $\max_i\{\Delta u_i, \Delta v_i\}$ gegen 0 streben, so gelangen wir zum Integral

$$\iint_{\overline{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|\, d(u, v).$$

Um sicherzustellen, dass dies tatsächlich dem Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ entspricht, müssen wir noch (ähnlich wie bei Kurven) garantieren, dass nicht Teile des Flächenstücks mehrfach durchlaufen werden.

Definition 14.3 *Die Parameterdarstellung $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ und das durch sie definierte Flächenstück heißen* doppelpunktfrei*, wenn F auf D eineindeutig ist.*

Definition 14.4 *Ist $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine doppelpunktfreie Parameterdarstellung eines Flächenstückes $\mathcal{F}$, so ist der* Flächeninhalt *von $\mathcal{F}$ die Zahl*

$$I(\mathcal{F}) = \iint\limits_{\overline{D}} \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \; d(u,v). \tag{14.8}$$

Das Integral in (14.8) schreibt man auch als $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$, wobei $d\sigma$ symbolisch für

$$\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \; d(u,v)$$

steht und *Flächenelement* heißt. Definition 14.4 wird wie folgt verallgemeinert:

Definition 14.5 *Durch $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, und $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $\mathcal{F}$. Dann heißt das Integral*

$$\iint\limits_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \, \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \, d(u,v) =: \int_{\mathcal{F}} H \, d\sigma \tag{14.9}$$

das Flächenintegral von H über $\mathcal{F}$ *(manchmal auch* Flächenintegral erster Art*).*

Als Motivation kann man sich ein elektrostatisch geladenes Flächenstück $\mathcal{F}$ vorstellen, wobei die Ladungsdichte H in jedem Punkt von $\mathcal{F}$ bekannt und die Gesamtladung gesucht ist.

Man kann (und muss) sich überlegen, dass die Integrale in (14.8) und (14.9) bei Parametertransformation und Orientierungswechsel invariant bleiben. Im Falle der Doppelpunktfreiheit ist die Schreibweise rechts in (14.9) völlig eindeutig, da je zwei zugehörige Parameterdarstellungen entweder äquivalent oder entgegengesetzt orientiert sind.

Beispiel 7 Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Mit Beispiel 4 erhalten wir

$$I(\mathcal{F}) = \iint\limits_{\overline{D}} r^2 \cos v \, d(u,v) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv \, du = 4\pi r^2$$

als Flächeninhalt der Kugeloberfläche. ∎

Beispiel 8 Sind D, f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$I(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} d\sigma = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \; d(u,v)$$

der Flächeninhalt des Funktionsgraphen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit der entsprechenden Formel für die Kurvenlänge des Graphen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 2 in Abschnitt 11.2). ∎

Definition 14.6 *Durch $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, und $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetiges Vektorfeld auf $\mathcal{F}$. Dann heißt*

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} := \iint_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \cdot \big(F_u(u,v) \times F_v(u,v)\big)\, d(u,v) \tag{14.10}$$

das Flächenintegral (zweiter Art) von H über $\mathcal{F}$. (Der Punkt steht für das Skalarprodukt.)

Schreiben wir

$$\begin{aligned} F_u(u,v) \times F_v(u,v) &= \frac{F_u(u,v) \times F_v(u,v)}{\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|} \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \\ &= N(u,v)\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|, \end{aligned}$$

so geht das Integral auf der rechten Seite von (14.10) über in

$$\iint_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \cdot N(u,v)\, \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|\, d(u,v), \tag{14.11}$$

so dass man das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma}$ zweiter Art auch als das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot N\, d\sigma$ erster Art auffassen kann. Flächenintegrale zweiter Art sind ebenfalls invariant bezüglich äquivalenter Parametertransformationen. Bei einem Orientierungswechsel ändern sie jedoch ihr Vorzeichen, da die Normalenvektoren ihre Richtung ändern.

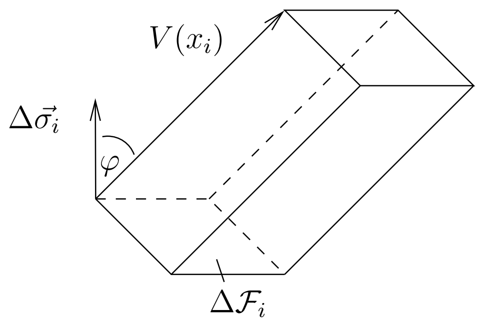
Zur *Motivation* der Flächenintegrale zweiter Art stellen wir uns ein stationäres (zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einer strömenden Flüssigkeit vor und fragen nach der Flüssigkeitsmenge, die ein gegebenes Flächenstück $\mathcal{F}$ pro Zeiteinheit durchfließt. Sinnvollerweise soll $\mathcal{F}$ orientiert sein, d.h. wir können uns etwa vorstellen, dass $\mathcal{F}$ eine "Unterseite" und eine "Oberseite" hat und dass die Normalenvektoren in Richtung der Oberseite zeigen.

Wie bei der Motivation zum Flächeninhalt denken wir uns $\mathcal{F}$ in Maschen unterteilt, die näherungsweise Parallelogrammform haben. Es sei $\Delta\vec{\sigma}_i$ der *Flächenvektor* eines solchen Parallelogramms $\Delta\mathcal{F}_i$, d.h. $\Delta\vec{\sigma}_i$ steht senkrecht auf $\Delta\mathcal{F}_i$ und zeigt in Normalenrichtung, und $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ ist gleich dem Flächeninhalt von $\Delta\mathcal{F}_i$.

Dann ist $|V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i|$ (mit einem $x_i \in \Delta\mathcal{F}_i$) das Flüssigkeitsvolumen, das näherungsweise pro Zeiteinheit durch $\Delta\mathcal{F}_i$ fließt. Pro Zeiteinheit schiebt sich nämlich ein Parallelepiped mit dem Grundflächeninhalt $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ und der Höhe $\|V(x_i)\| \cos\varphi$ (vgl. die folgende Skizze), d.h. mit dem Volumen

$$\|V(x_i)\|\, \|\Delta\vec{\sigma}_i\| \cos\varphi = V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

durch $\Delta\mathcal{F}_i$. (In erster Näherung nehmen wir V als konstant auf $\Delta\mathcal{F}_i$ an.)



Fließt die Flüssigkeit aus der Seite von $\Delta\mathcal{F}_i$ heraus, in die der Flächenvektor $\Delta\vec{\sigma}_i$ zeigt, so ist $V(x_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}_i \geq 0$ und andernfalls ≤ 0. Das Vorzeichen von $V(x_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}_i$ gibt also an, in welche Richtung $\Delta\mathcal{F}_i$ durchflossen wird. Die Summation der Durchflüsse über alle Maschen

$$\sum_i V(x_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}_i$$

und der Übergang zu beliebig kleinen Maschenweiten führen zum Flächenintegral 2. Art

$$U = \int_{\mathcal{F}} V(x)\cdot d\vec{\sigma}.$$

Die Größe $|U|$ gibt also das Gesamtvolumen an, das pro Zeiteinheit das Flächenstück $\mathcal{F}$ durchströmt, wobei die Anteile beider Strömungsrichtungen durch $\mathcal{F}$ gegeneinander aufgerechnet sind. Das Vorzeichen von U gibt an, an welcher Seite des Flächenstücks mehr herausfließt: Ist $U > 0$, so strömt mehr Flüssigkeit in Richtung der Normalenvektoren von $\mathcal{F}$, ist $U < 0$, so in entgegengesetzter Richtung. Man nennt U auch den *Fluss* von V durch $\mathcal{F}$. ∎

Beispiel 9 Seien D und F wieder wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche), und sei $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ die identische Abbildung, d.h. $H(x,y,z)=(x,y,z)$. Dann ist nach Beispiel 4

$$N(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v),$$

und mit

$$H\big(F(u,v)\big) = F(u,v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$$

erhalten wir mit (14.11) für das Flächenintegral 2. Art

$$\int_{\mathcal{F}} H\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} H\cdot N\,d\sigma = \int_{\mathcal{F}} r\,d\sigma = r\int_{\mathcal{F}} d\sigma.$$

Das Flächenintegral $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$ ist gleich dem Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Wir haben es in Beispiel 7 berechnet und erhalten damit

$$\int_{\mathcal{F}} H\cdot d\vec{\sigma} = 4\pi r^3.$$ ∎

14.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes

Unsere letzten Ziele in diesem Kapitel sind die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$$

und der Formel der partiellen Integration

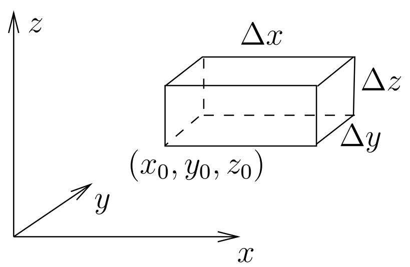
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + u(x)v(x)\Big|_a^b$$

auf mehrdimensionale Integrale. Es stellt sich die Frage, durch welche Differentialoperatoren die Ableitungen f', u', v' und wodurch die Randterme $f|_a^b$ und $uv|_a^b$ zu ersetzen sind.

Unser erstes Ziel ist der *Gaußsche Integralsatz* im $\mathbb{R}^3$. Seine anschauliche Bedeutung ist völlig einleuchtend:

> *Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in diesem Gebiet hervorbringen.*

Wie kann man die Flüssigkeitsmenge, die eine Quelle im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ hervorbringt, mathematisch beschreiben? Wir betrachten eine stationäre (zeitunabhängige) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit (d.h. mit konstanter Dichte), die im Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit $V(x, y, z) = \big(V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z)\big)$ hat. Im Punkt (x_0, y_0, z_0) heften wir einen kleinen achsenparallelen Quader Q mit den Seitenlängen $\Delta x, \Delta y$ und Δz an.



Dann ist das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit in Richtung der positiven x-Achse durch die linke bzw. rechte Seitenwand des Quaders fließt, näherungsweise gleich

$$V_1(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z \quad \text{bzw.} \quad V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y \Delta z.$$

Das Volumen, das pro Zeiteinheit aus dem Quader Q in der positiven x-Richtung austritt, ist also etwa gleich

$$\begin{aligned}
&\big(V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)\big)\Delta y \Delta z \\
&= \frac{V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \Delta z \\
&\approx \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z.
\end{aligned}$$

Wir stellen in ähnlicher Weise die Massenbilanz für den Fluß in positiver y- und z-Richtung auf und erhalten als Endresultat, dass das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit aus Q austritt, ungefähr gleich

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (14.12)$$

ist. Mit der in Abschnitt 10.2 eingeführten Divergenz

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad x \in D$$

eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $F = (F_1, \ldots, F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ können wir (14.12) schreiben als

$$(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividieren wir diesen Wert durch das Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ von Q und ziehen wir Q auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) zusammen, so können wir $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)$ als *Quellendichte* der Strömung im Punkt (x_0, y_0, z_0) interpretieren. Ist $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) > 0$, so ist (x_0, y_0, z_0) eine *Quelle* im eigentlichen Sinn (ihr entströmt Flüssigkeit). Im Fall $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) < 0$ heißt (x_0, y_0, z_0) auch eine *Senke* (da in diesem Punkt Flüssigkeit verschwindet).

Einige Rechenregeln für die Divergenz Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $F, G : D \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F+G) &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G, \\
\operatorname{div}(\lambda F) &= \lambda \operatorname{div} F \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F.
\end{aligned}$$

14.4 Der Gaußsche Integralsatz im Raum

Wir können nun die anschauliche Aussage des Gaußschen Integralsatzes in Formeln fassen. Es sei G ein geeigneter räumlicher Bereich und ∂G sein Rand (seine

Oberfläche). Die genauen Voraussetzungen geben wir später an. In jedem Randpunkt haben wir zwei Normaleneinheitsvektoren: einen, der in den Körper hineinzeigt (die sogenannte *innere Normale*) und einen, der von G weg zeigt (die *äußere Normale*). Es sei $N : \partial G \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld der äußeren Normalen. Weiter sei V das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Nach Abschnitt 14.2 (Interpretation des Flächeninhalts 2. Art) ist der Durchfluß durch ∂G in Richtung der äußeren Normalen (also das, was aus G *herausfließt*), gleich

$$\iint\limits_{\partial G} V \cdot N \, d\sigma. \tag{14.13}$$

Die durch Quellen und Senken in G hervorgebrachte Flüssigkeitsmenge erhalten wir dagegen durch Aufintegrieren der Quellendichte über G:

$$\iiint\limits_{G} (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \tag{14.14}$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz sind die Integrale (14.13) und (14.14) gleich. Nun zur exakten Formulierung.

Definition 14.7 a) *Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt* C^1-Normalbereich bzgl. der x_1x_2-Ebene, *wenn es eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ so gibt, dass*

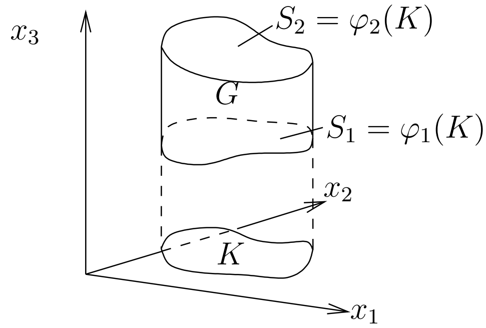
$$G = \Big\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x_1, x_2) \in K, \ \varphi_1(x_1, x_2) \le x_3 \le \varphi_2(x_1, x_2) \Big\}$$

gilt und dass der Rand ∂K durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg darstellbar ist. Analog erklärt man C^1-Normalbereiche bezüglich der x_2x_3- und x_1x_3-Ebene.

b) *Die Menge G heißt ein* C^1-Normalbereich, *wenn sie ein C^1-Normalbereich bezüglich der x_1x_2-, der x_2x_3- und der x_1x_3-Ebene ist.*

(Es sei noch einmal an unsere Vereinbarung erinnert: Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge K heißt stetig differenzierbar, wenn sie zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge $G \supseteq K$ fortgesetzt werden kann.)

Einen C^1-Normalbereich bzgl. der x_1x_2-Ebene kann man sich so vorstellen:



Der obere Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ ist ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung

$$F_2 : K \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto \big(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)\big).$$

Der durch F_2 bestimmte Normaleneinheitsvektor (vgl. Beispiel 5 aus 14.1)

$$N_2(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, 1\right)$$

ist der *äußere* Normaleneinheitsvektor für G (da die z-Komponente > 0 ist). Der untere Deckel S_1 wird beschrieben durch

$$F_1 : K \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto \big(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)\big),$$

und der zugehörigen Normaleneinheitsvektor ist

$$N_1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \Big(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, 1\Big).$$

Dieser zeigt ebenfalls in Richtung der positiven z-Achse (also in G *hinein*), so dass der *äußere* Normalenvektor an G auf S_1 gleich $-N_1(u,v)$ ist.

Satz 14.8 (Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$) *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich und $H : G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter bezeichne $N : \partial G \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von G. Dann ist*

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} H)(x)\, dx = \iint\limits_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \qquad (14.15)$$

Beweis Es genügt, die Aussage zu beweisen, wenn H die Gestalt $H = (0, 0, H_3)^T$ hat (man kann ja H als Summe dreier derartiger Ausdrücke schreiben, und die Divergenz sowie die Integrale in (14.15) sind linear in H). Nach Satz 13.34 erhalten wir wegen $\operatorname{div} H = \frac{\partial H_3}{\partial x_3}$

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} H)(x)\,dx = \iint\limits_K \Big(\int_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} \frac{\partial H_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 \Big) d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_K \Big(H_3\big(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2)\big) - H_3\big(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2)\big) \Big) d(x_1,x_2).$$

Auf dem oberen Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ ist

$$H \cdot N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} H_3$$

und damit

$$\iint\limits_K H_3\big(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2)\big)\,d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_K (H \cdot N) \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}\, d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_{S_2} H \cdot N\,d\sigma.$$

Analog zeigt man, dass

$$-\iint\limits_K H_3\big(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2)\big)\,d(x_1,x_2) = \iint\limits_{S_1} H \cdot N\,d\sigma.$$

Auf dem noch fehlenden Randstück $\partial G \backslash (S_1 \cup S_2)$ von G, also auf

$$S_3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x_1,x_2) \in \partial K,\ \varphi_1(x_1,x_2) \le x_3 \le \varphi_2(x_1,x_2)\},$$

existiert der äußere Normalenvektor N ebenfalls (bis auf endlich viele Geradenstücke $\{y\} \times [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ mit $y \in \partial K$, in denen die Parametrisierung von ∂K nicht differenzierbar ist), und die Komponente von N in x_3-Richtung ist 0. Daher ist $H \cdot N = 0$ auf S_3. Zusammengefasst erhalten wir

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} H)(x)dx = \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{S_j} H \cdot N\,d\sigma = \iint\limits_{\partial G} H \cdot N\,d\sigma. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 1 Wir kommen noch einmal zurück auf Beispiel 9 aus 14.2. Dort waren D und F wie in Beispiel 1 aus 14.1 (Kugeloberfläche) und $H(x,y,z) = (x,y,z)$, und wir haben erhalten, dass

$$\int_{\partial G} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial G} H \cdot N\,d\sigma = 4\pi r^3.$$

Andererseits ist $\operatorname{div} H = 3$, so dass mit dem Volumen V der Kugel G gilt

$$\int_G (\operatorname{div} H)(x)dx = 3\int_G dx = 3V.$$

Der Gaußsche Satz liefert nach Gleichsetzen

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 14.9 (Partielle Integration in $\mathbb{R}^3$) *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich und $f, g : G \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei $N = (N_1, N_2, N_3) : \partial G \to \mathbb{R}$ das äußere Normalenfeld an G. Dann gilt für $i = 1, 2, 3$*

$$\iiint\limits_G f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = -\iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\,g\,dx + \iint\limits_{\partial G} fgN_i\,d\sigma. \tag{14.16}$$

Beweis Sei z.B. $i = 1$. Für die stetig differenzierbare Funktion

$$F : G \to \mathbb{R}^3, \quad F(x) = \big(f(x)g(x), 0, 0\big) \tag{14.17}$$

ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,g + f\,\frac{\partial g}{\partial x_1}$$

und $F \cdot N = fgN_1$. Die Behauptung folgt also sofort, wenn man die Funktion (14.17) in den Gaußschen Integralsatz (14.15) einsetzt. $\blacksquare$

Anmerkung 1 Wir haben in Satz 14.8 und Folgerung 14.9 statt $\int_G$ und $\int_{\partial G}$ die Schreibweisen $\iiint\limits_G$ und $\iint\limits_{\partial G}$ benutzt, um deutlich zu machen, dass (dreidimensionale) Volumenintegrale und (zweidimensionale) Oberflächenintegrale auftreten.

Anmerkung 2 Sind $F_1, \ldots, F_n$ Flächenstücke, die sich nicht überlappen, so definiert man das Flächenintegral über $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ durch

$$\int_F = \int_{F_1} + \ldots + \int_{F_n}.$$

Dies haben wir im Beweis des Gaußschen Satzes benutzt ($\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$).

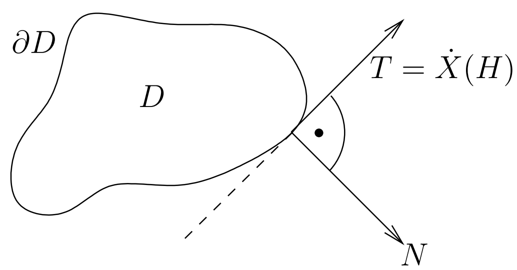
Anmerkung 3 Satz 14.8 und Folgerung 14.9 gelten auch noch unter schwächeren Voraussetzungen. Z.B. genügt es, dass sich G als endliche Vereinigung sich nicht überlappender C^1-Normalbereiche schreiben läßt. Man beachte auch, dass der Normalenvektor nicht in jedem Randpunkt definiert ist (z.B. nicht entlang der Kanten eines Quaders).

14.5 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Der Gaußsche Integralsatz und seine Folgerung gelten (bei geeigneter Definition des Flächenintegrals) in jeder Raumdimension n. Den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ kann man durch geeignete Reduzierung um eine Koordinate wie folgt aus dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gewinnen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der x_1- und der x_2-Achse (vgl. Definition 14.8). In diesem Fall nennen wir D einfach einen *Normalbereich*. Der Rand ∂D sei eine geschlossene Kurve, die durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird. Durchläuft t das Intervall $[a, b]$ von a nach b, so wandert $X(t)$ entlang ∂G in einer bestimmten Richtung, und wir wollen annehmen, dass dabei G stets links des Weges liegt. Man sagt auch, dass *D vom Weg X positiv umlaufen wird* oder dass der Rand *∂D positiv orientiert* ist (anschaulich: im Gegenuhrzeigersinn).

Der Tangentialeinheitsvektor an ∂D im Punkt $X(t) = \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ ist $T := \big(\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t)\big)$, und $N := \big(\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t)\big)$ ist ein auf T senkrecht stehender Vektor, der nach außen zeigt.



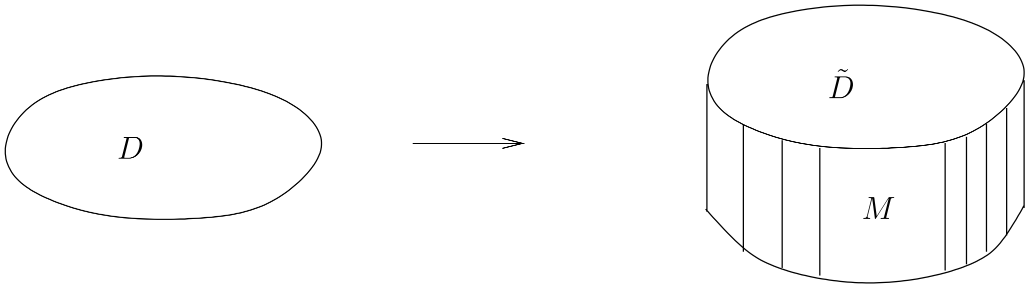
Man beachte, dass diese Vektoren nur in Punkten definiert sind, in denen X stetig differenzierbar ist. Auf D sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$V = (V_1, V_2)^T : D \to \mathbb{R}^2$$

gegeben. Wir bilden aus D den räumlichen Bereich

$$\tilde{D} := D \times [0, 1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in D, x_3 \in [0, 1]\},$$

d.h. $\tilde{D}$ ist eine Scheibe (= ein Zylinder) der Dicke 1, bei dem Boden und Deckel die Form von D haben. Offenbar ist $\tilde{D}$ ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$.



Außerdem erweitern wir V um eine Komponente:

$$\tilde{V} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^3,\ \tilde{V} = (V_1, V_2, 0)^T.$$

Der Gaußsche Integralsatz (14.15), angewandt auf $\tilde{D}$ und $\tilde{V}$, liefert

$$\iint_{\partial \tilde{D}} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \tag{14.18}$$

Beim Flächenintegral auf der linken Seite heben sich die Anteile des Bodens und des Deckels weg, da die zugehörigen Normalenvektoren entgegengesetzt sind, sonst jedoch alles gleich ist. Es ist insbesondere $\tilde{V}(x_1, x_2, 0) = \tilde{V}(x_1, x_2, 1) = V(x_1, x_2)$. Also verbleibt nur das Integral über die Mantelfläche $M = \partial D \times [0, 1]$. Aus (14.18) folgt somit

$$\iint_{M} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \tag{14.19}$$

Die Mantelfläche hat eine Parameterdarstellung

$$F(t, z) = \big(X_1(t), X_2(t), z\big)^T \quad \text{mit } t \in [a, b], z \in [0, 1],$$

woraus man den äußeren (aber noch nicht normierten!) Normalenvektor

$$n(t, z) = \big(\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t), 0\big)^T$$

erhält. Mit (14.11) erhalten wir für die linke Seite von (14.19)

$$\begin{aligned}
\iint_{M} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma &= \iint_{M} \tilde{V} \cdot n \, \frac{1}{\|n\|} \, d\sigma \\
&\overset{(14.11)}{=} \iint_{[a,b]\times[0,1]} \tilde{V}\big(F(t, z)\big) \cdot n\big(F(t, z)\big) \, d(t, z) \\
&= \int_0^1 \int_a^b V\big(X(t)\big) \cdot \big(\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t)\big) \, dt \, dz \\
&= \int_a^b \Big(V_1\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) - V_2\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t)\Big) \, dt,
\end{aligned}$$

während auf der rechten Seite von (14.19)

$$\operatorname{div} \tilde{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} V$$

ist. Daher ist

$$\iiint\limits_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 \iint\limits_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2) \, dx_3 = \iint\limits_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2).$$

Zusammengefaßt erhalten wir

Satz 14.10 (Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich (bzgl. der x_1- und der x_2-Achse), dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D positiv umläuft. Weiter sei $V = (V_1, V_2)^T : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_a^b \Big(V_1\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) - V_2\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t) \Big) \, dt = \iint\limits_D (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \tag{14.20}$$

Man beachte, dass auf der linken Seite von (14.20) ein Wegintegral entlang des Weges X steht. Nehmen wir die Umbenennung

$$W_1 := V_2, \quad W_2 := -V_1, \quad W := (W_1, W_2)^T$$

vor, so geht nach Multiplikation mit -1 die linke Seite von (14.20) über in

$$\int_a^b \Big(W_1\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t) + W_2\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) \Big) \, dt,$$

d.h. in das Wegintegral $\int_{\partial D} W \cdot dX$ über den durch X parametrisierten Rand von D, und auf der rechten Seite von (14.20) ist $-\operatorname{div} V = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$ zu ersetzen durch $\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$. Man schreibt oft

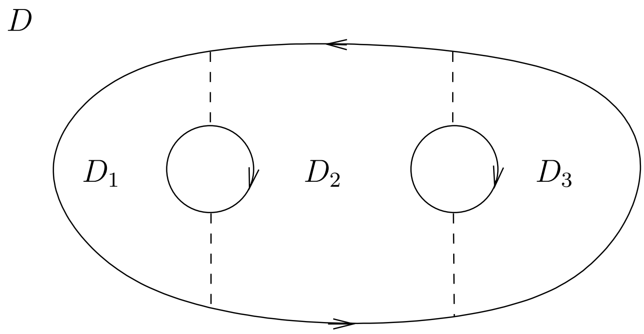
$$\operatorname{rot} W := \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \tag{14.21}$$

und nennt $\operatorname{rot} W$ die (skalarwertige) *Rotation* des Vektorfeldes W. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die folgende Version des Gaußschen Satzes im $\mathbb{R}^2$.

Satz 14.11 (Greenscher Integralsatz) *Seien D und X wie in Satz 14.10, und $W = (W_1, W_2)^T : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial\Omega} W \cdot dX = \int_D \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_D (\operatorname{rot} W)(x) \, dx.$$

Die Sätze 14.10 und 14.11 gelten auch unter allgemeineren Bedingungen an die Menge D. Z.B. darf D die Abschließung eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes sein, dessen Rand sich durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisieren läßt. Es genügt sogar, dass D sich in endlich viele derartige Mengen zerlegen läßt.



Man beachte die Orientierung des (aus mehreren Stücken bestehenden) Randes.

14.6 Der Stokessche Integralsatz

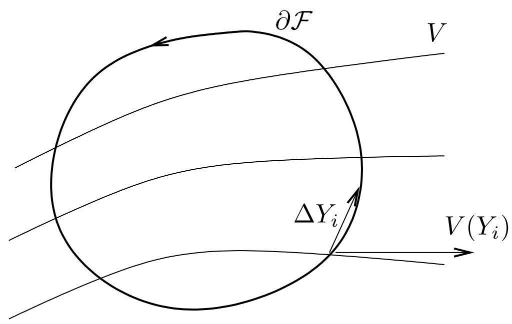
Wir beginnen mit einer kurzen Motivation. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit deuten. In M sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, dessen Rand durch einen stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Weg $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Unter der *Zirkulation von V entlang $\partial\mathcal{F}$* versteht man das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \int_a^b \sum_{i=1}^{3} V_i\big(Y(t)\big)\dot{Y}_i(t)dt. \tag{14.22}$$

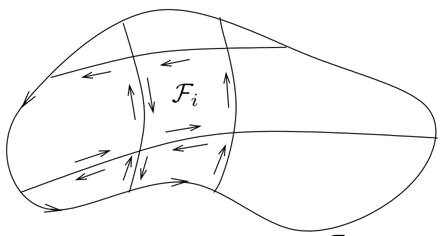
Denkt man sich dieses Integral durch Riemann-Summen

$$\sum_j V(Y_j) \cdot \Delta Y_i$$

approximiert, so entspricht jeder Summand $V(Y_i) \cdot \Delta Y_i$ einer Geschwindigkeitskomponenten in der Durchlaufrichtung der Kurve. Die Summation dieser Komponenten ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve $\partial\mathcal{F}$ umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve zirkuliert.



Wir zerlegen das Flächenstück $\mathcal{F}$ in endlich viele kleine Maschen $\mathcal{F}_i$.



Bei entsprechender Orientierung der Ränder der $\mathcal{F}_i$ erhalten wir für die Zirkulation

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \sum_i \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY = \sum_i \frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \cdot I(\mathcal{F}_i), \tag{14.23}$$

wobei $I(\mathcal{F}_i)$ für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}_i$ steht. Nun verfeinern wir die Maschen. Man kann zeigen (vgl. Burg/Haf/Wille IV, S. 156-158): Wenn man eine Masche $\mathcal{F}_i$ auf einen Punkt $x_i \in \mathcal{F}$ zusammenzieht, dann strebt der Quotient

$$\frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \tag{14.24}$$

gegen einen festen Wert, nämlich gegen $(\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)$. Dieser Ausdruck heißt auch die *Wirbelstärke* von V in x_i. Hierbei ist $N(x_i)$ die gemeinsame Flächennormale der zu x_i zusammengezogenen Maschen, und die Rotation $\operatorname{rot} V$ ist wie in Abschnitt 10.2 durch

$$(\operatorname{rot} F)(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\right)^T$$

erklärt.

Man beachte, dass man für ein Vektorfeld der Gestalt

$$F(x_1, x_2, x_3) = \big(F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ 0\big)$$

als Rotation gerade das Vektorfeld $\big(0, 0, \operatorname{rot}(F_1, F_2)\big)$ mit der in (14.21) eingeführten Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes erhält.

Für kleine $\Delta\mathcal{F}_i$ können wir also (14.24) näherungsweise durch

$$(\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)$$

ersetzen, und aus (14.23) wird

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY \approx \sum_i (\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)\, I(\mathcal{F}_i). \tag{14.25}$$

Die rechte Seite ist eine Riemannsumme für das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot N \, d\sigma.$$

Der folgende Satz von Stokes sagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen an $\mathcal{F}$ die Zirkulation $\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY$ tatsächlich gleich diesem Flächenintegral über die Wirbelstärken ist.

Satz 14.12 (Stokes'scher Integralsatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D einmal positiv umläuft. Weiter sei $F : D \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, die ein Flächenstück $\mathcal{F} = F(D)$ parametrisiert. Der Weg $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $Y(t) = F\big(X(t)\big)$ definiert eine orientierte Kurve in $\mathcal{F}$, die wir den* Rand *$\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ nennen. Schließlich sei $N : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ das durch F wie in* (14.6) *festgelegte Normalenfeld. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$*

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY. \tag{14.26}$$

Beweis Es genügt, ein Vektorfeld H vom Typ $(P, 0, 0)^T$ zu betrachten. Der Beweis für $H = (0, Q, 0)^T$ und $H = (0, 0, R)^T$ verläuft analog. Zuerst schreiben wir das Kurvenintegral $\int_{\partial F} H \cdot dY$ über der Kurve $\partial\mathcal{F}$ in ein Kurvenintegral über ∂D um:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{F}} (P, 0, 0)^T \cdot dY &= \int_a^b P\big(Y(t)\big)\, \dot{Y}_1(t) dt \\
&= \int_a^b P\left(F\big(X(t)\big)\right)\, (F_1 \circ X)'(t) dt \\
&= \int_a^b P\left(F\big(X(t)\big)\right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\, \dot{X}_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\, \dot{X}_2(t)\right) dt \\
&= \int_{\partial D} \left((P \circ F) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1},\ (P \circ F) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \cdot dX,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben. Nach Satz 14.11 (Greenscher Integralsatz) ist dieses Integral gleich

$$\int_D \operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)(x)\,dx. \tag{14.27}$$

Wir berechnen die skalare (zweidimensionale) Rotation nach (14.21)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial x_1}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)\\
&\quad=\frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+(P\circ F)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2\partial x_1}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1\partial x_2}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir die Produktregel benutzt haben. Der letzte Summand ist nach dem Satz von Schwarz gleich 0. Mit der Kettenregel erhalten wir für die ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\frac{\partial P}{\partial x_3}\,\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\\
&\qquad-\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial P}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P}{\partial x_3}\,\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\\
&\quad=\frac{\partial P}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial P}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).
\end{aligned}$$

Sei $n=(n_1,n_2,n_3)=\frac{\partial F}{\partial x_1}\times\frac{\partial F}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,\frac{\partial F_2}{\partial x_1},\,\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\times\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2},\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2},\,\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)$, d.h. $N=n/\|n\|$ ist der Normaleneinheitsvektor zu $\mathcal{F}$ (vgl. (14.6)). Nach Definition des Vektorprodukts ist

$$n_2=\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\quad\text{und}\quad n_3=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

und damit zusammengefasst

$$\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial P}{\partial x_3}\,n_2-\frac{\partial P}{\partial x_2}\,n_3. \tag{14.28}$$

Wegen $\operatorname{rot} H=\operatorname{rot}(P,0,0)^T=\left(0,\,\frac{\partial P}{\partial x_3},\,-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)^T$ können wir (14.28) schreiben als

$$\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)=\big((\operatorname{rot} H)\circ F\big)\cdot n.$$

Wir setzen dies in (14.27) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial F} H \cdot dY &= \int_D \operatorname{rot}\left((P \circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\ (P \circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx \\
&= \int_D \big((\operatorname{rot} H) \circ F \big) \cdot n \, dx \\
&= \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma
\end{aligned}$$

nach der Definition 14.6 des Flächenintegrals. ∎

Beispiel 2 Sei $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi/2]\}$, $r > 0$ und

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(u,v) = (r \cos u \cos v,\ r \sin u \cos v,\ r \sin v).$$

Das Flächenstück $F(D)$ ist die obere Halbkugelfläche um den Ursprung mit dem Radius r. Ein Vektorfeld H sei durch

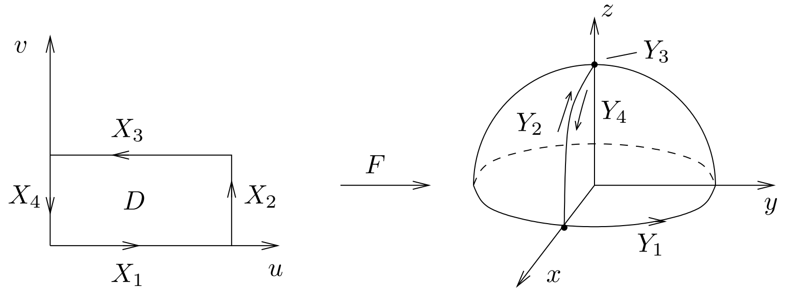
$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad H(x,y,z) = (-y, x, 1)$$

gegeben. Der Rand ∂D des Rechtecks D läßt sich durch 4 Wege beschreiben:

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= (t, 0) && \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi], \\
X_2(t) &= (2\pi, t) && \text{mit} \quad t \in [0, \pi/2], \\
X_3(t) &= (-t, \pi/2) && \text{mit} \quad t \in [-2\pi, 0], \\
X_4(t) &= (0, -t) && \text{mit} \quad t \in [-\pi/2, 0].
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Parameterdarstellungen $Y_k(t) = F\big(X_k(t)\big)$, $k = 1, \ldots, 4$, für die Kurve $\partial F(D)$ sind

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= (r \cos t,\ r \sin t, 0) && \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi], \\
Y_2(t) &= (r \cos t, 0, r \sin t) && \text{mit} \quad t \in [0, \pi/2], \\
Y_3(t) &= (0, 0, r) && \text{mit} \quad t \in [-2\pi, 0], \\
Y_4(t) &= (r \cos t, 0, -r \sin t) && \text{mit} \quad t \in [-\pi/2, 0].
\end{aligned}$$



(Man beachte, dass $F(\partial D)$ *nicht* mit der Kreislinie in der xy-Ebene zusammenfällt!) Nun ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial F(D)} H \cdot dY &= \int_0^{2\pi} H\big(Y_1(t)\big) \cdot \dot{Y}_1(t)\, dt + \int_0^{\pi/2} H\big(Y_2(t)\big) \cdot \dot{Y}_2(t)\, dt \\ &\quad + \int_{-2\pi}^{0} H\big(Y_3(t)\big) \cdot \dot{Y}_3(t)\, dt + \int_{-\pi/2}^{0} H\big(Y_4(t)\big) \cdot \dot{Y}_4(t)\, dt.\end{aligned}$$

Wir berechnen das erste Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} H\big(Y_1(t)\big) \cdot \dot{Y}_1(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} (-r\sin t,\, r\cos t,\, 1) \cdot (-r\sin t,\, r\cos t,\, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)\, dt = 2\pi r^2.\end{aligned}$$

Das dritte Integral ist wegen $\dot{Y}_3 = 0$ gleich 0, und das zweite und vierte Integral heben sich gegenseitig auf (dies ist auch sofort klar, wenn man sich die Wege Y_2, Y_3 und Y_4 ansieht). Also ist

$$\int_{\partial F(D)} H \cdot dY = 2\pi r^2.$$

Nach dem Satz von Stokes ist dann auch $\iint\limits_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N\, d\sigma = 2\pi r^2$, was wir zur Übung nachrechnen. Zunächst ist $\operatorname{rot} H = (0, 0, 2)$ und

$$N = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad \text{sowie} \quad \|F_u \times F_v\| = r^2 \cos v$$

nach Beispiel 4 aus Abschnitt 14.1. Damit wird

$$\begin{aligned}\iint\limits_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N\, d\sigma &= \iint\limits_{D} (\operatorname{rot} H)\big(F(u,v)\big) \cdot N(u,v)\, \|F_u \times F_v\|\, d(u,v) \\ &= \iint\limits_{D} 2\sin v \cdot r^2 \cos v\, d(u,v) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin 2v\, dv\, du = 2\pi r^2.\end{aligned}$$

■

Auch der Satz von Stokes läßt sich unter schwächeren Voraussetzungen zeigen. Wir vermerken noch eine interessante Konsequenz des Stokes'schen Satzes.

Folgerung 14.13 *Sei B ein stückweise glatt berandeter Bereich im $\mathbb{R}^3$ und $H : B \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\iint\limits_{\partial B} \operatorname{rot} H \cdot N\, d\sigma = 0.$$

Kurz gesagt: *Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist Null.*

Zum Beweis schneidet man einfach aus ∂B ein kleines geeignetes Flächenstück $\mathcal{F}$ heraus. Auf der verbleibenden Fläche ist nach Stokes

$$\iint\limits_{\partial B \setminus \mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dX.$$

Zieht man $\mathcal{F}$ auf einen Punkt zusammen, so geht das Integral auf der rechten Seite gegen Null, da die Weglänge von $\partial \mathcal{F}$ gegen Null stebt. ■

14.7 Einige weitere Differential- und Integralformeln

14.7.1 Der Nabla-Operator

Der *symbolische* Vektor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ heißt *Nabla-Operator*. Formal rechnet man mit ihm wie mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^3$. In diesem Sinne ist also für stetig differenzierbare Vektorfelder V und Skalarfelder φ

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \operatorname{grad} \varphi \\ \nabla \cdot F &= \operatorname{div} F \\ \nabla \times F &= \operatorname{rot} F. \end{aligned}$$

Ist das Skalarfeld φ zweimal stetig differenzierbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

Der Operator

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt *Laplace-Operator*.

14.7.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren

Das Vektorfeld F und das Skalarfeld φ seien zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \tag{14.29}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \tag{14.30}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi. \tag{14.31}$$

Man rechnet dies mit dem Satz von Schwarz leicht nach. Die ersten beiden Formeln besagen: *Wirbelfelder sind divergenzfrei* und *Gradientenfelder sind wirbelfrei.*

14.7.3 Produktregeln

Die Vektorfelder F, G und die Skalarfelder φ, ψ seien stetig differenzierbar. Dann gelten z.B. die folgenden Produktregeln, die man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi, && (14.32)\\
\operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad}\varphi, && (14.33)\\
\operatorname{rot}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad}\varphi \times F, && (14.34)\\
\operatorname{div}(F \times G) &= G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G. && (14.35)
\end{aligned}$$

Weitere Beziehungen finden Sie in der Literatur.

14.7.4 Die Greenschen Formeln

Es sei G wie im Gaußschen Integralsatz im Raum (Satz 14.8), und $f, g : G \to \mathbb{R}$ seien so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln verlangen. Aus Formel (14.33) (mit $F = \operatorname{grad} g$) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g,$$

wobei wir noch (14.31) benutzt haben. Integration über G und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf der linken Seite liefern

$$\iint\limits_{\partial G} f \operatorname{grad} g \cdot N \, d\sigma = \iiint\limits_{B} (f\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dx$$

mit dem äußeren Normalenvektor N an ∂G. Mit der Richtungsableitung

$$\frac{\partial g}{\partial N} = \operatorname{grad} g \cdot N$$

(vgl. Abschnitt 10.4) erhalten wir die *erste Greensche Integralformel*

$$\iint\limits_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma = \iiint\limits_{G} (f\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dx. \tag{14.36}$$

Vertauscht man hierin f mit g und subtrahiert die erhaltene Formel von (14.36), so erhält man die *zweite Greensche Integralformel*

$$\iint\limits_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma = \iiint\limits_{G} (f\Delta g - g\Delta f) dx. \tag{14.37}$$

Im Spezialfall $g = 1$ folgt hieraus

$$\iint\limits_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial N} d\sigma = \iiint\limits_{G} \Delta f \, dx. \tag{14.38}$$

Man kann Raumintegrale über Laplacesche Differentialausdrücke Δf also in Flächenintegrale umschreiben. Die Greenschen Formeln sind außerordentlich nützlich beim Studium von partiellen Differentialgleichungen.