

13 Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher

In diesem Kapitel kommen wir zur Definition und wesentlichen Eigenschaften des Riemann-Integrals für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Genauso, wie uns das Problem der Flächenberechnung eine Motivation für die Einführung des Riemann-Integrals für Funktionen einer Veränderlichen war, kann uns nun das Problem der Volumendefinition- und berechnung (oder allgemeiner etwa das Problem der Massebestimmung eines Körpers mit ortsabhängiger Dichte) als eine Motivation dienen.

In diesem und im folgenden Kapitel kann es lediglich darum gehen, einen ersten Eindruck von der Integration im \mathbb{R}^n zu gewinnen und einige Rechentechniken zu vermitteln. Im vierten Semester wenden wir uns diesem Thema ausführlicher zu.

13.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit der Integration über den „einfachsten“ Mengen im \mathbb{R}^n , nämlich über Intervallen, Rechtecken, Quadern, \dots , die wir kurz unter dem Namen *Intervall im \mathbb{R}^n* zusammenfassen. Im Unterschied zum \mathbb{R}^1 gibt es aber im \mathbb{R}^n weitaus mehr Mengen, über die man integrieren möchte (Kugeln, Pyramiden, \dots). Wir werden daher später die in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen auf allgemeinere Mengen übertragen.

Unter einem *abgeschlossenen Intervall* im \mathbb{R}^n verstehen wir ein Produkt

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i\}.$$

Ein *offenes Intervall* im \mathbb{R}^n ist ein Produkt

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i\}.$$

Ist I ein offenes oder abgeschlossenes Intervall wie oben, so erklären wir seinen *Inhalt* durch

$$|I| := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Wir erhalten also für

- $n = 1$ gewöhnliche Intervalle, und $|I|$ ist die Intervall-Länge,
- $n = 2$ Rechtecke, und $|I|$ ist der Flächeninhalt,
- $n = 3$ Quader, und $|I|$ ist das Volumen, \dots

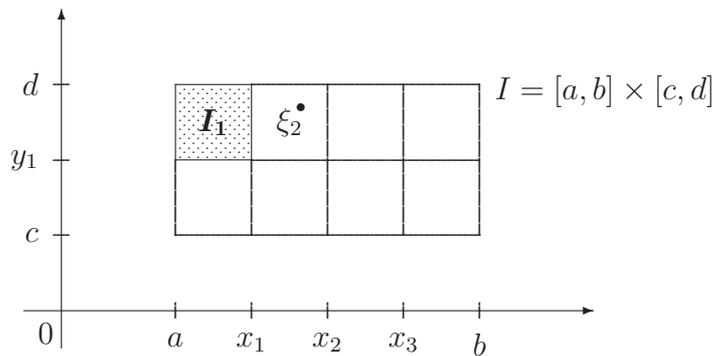
Eine *Zerlegung* Z eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt $Z_1 \times \dots \times Z_n$ von Zerlegungen Z_i der Intervalle $[a_i, b_i]$. Die *Teilintervalle* von Z erhält man, indem man im Produkt $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$ die T_i alle Teilintervalle der Zerlegung Z_i von $[a_i, b_i]$ durchlaufen lässt. Eine Zerlegung Z' heißt *Verfeinerung* von Z , wenn $Z \subseteq Z'$.

Ist insbesondere $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ und $Z' = Z'_1 \times \dots \times Z'_n$, so ist Z' genau dann eine Verfeinerung von Z , wenn jedes Z'_i eine Verfeinerung von Z_i ist. Unter dem *Feinheitsmaß* (Maschenweite) von $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ versteht man die Zahl

$$|Z| := \max_i |Z_i|.$$

Dabei ist $|Z_i|$ das Feinheitsmaß der Zerlegung Z_i des Intervalls $[a_i, b_i]$.

Beachte: In diese Definition geht nicht der Inhalt der Teilintervalle von Z ein sondern deren „Kantenlänge“.



Hat Z die Teilintervalle I_1, \dots, I_r , und ist $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ein Vektor mit $\xi_i \in I_i$, so heißt ξ ein *Zwischenvektor* zu Z .

Ist nun f eine reellwertige Funktion auf I , Z eine Zerlegung von I mit den Teilintervallen I_1, \dots, I_r und $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ ein Zwischenvektor zu Z , so heißt

$$S(Z, \xi, f) := \sum_{i=1}^r f(\xi_i) |I_i|$$

eine *Riemannsumme* für f .

Definition 13.1 Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn für jede Folge $(Z^{(m)})$ von Zerlegungen von I mit $|Z^{(m)}| \rightarrow 0$ und für jede zugehörige Folge von Zwischenvektoren $(\xi^{(m)})$ die Folge $(S(Z^{(m)}, \xi^{(m)}, f))$ der entsprechenden Riemannsummen konvergiert.

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann sieht man wie im Beweis von Satz 8.10, dass alle Folgen $(S(Z^{(m)}, \xi^{(m)}, f))$ gegen den gleichen Wert konvergieren. Dieser

heißt das *Riemann-Integral* von f über I . Wir schreiben dafür

$$\int_I f \, dx, \quad \int_I f(x) dx, \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \quad \text{oder} \quad \int_I f \, dV.$$

Die folgenden Aussagen beweist man wie für $n = 1$ (Sätze 8.4, 8.22, 8.23, 8.24 und 8.19).

Satz 13.2 *Jede auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbare Funktion f ist beschränkt.*

Satz 13.3 *Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar auf I , und es gilt*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_I f \, dx + \beta \int_I g \, dx.$$

Satz 13.4 *Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$, dann ist auch*

$$\int_I f \, dx \geq \int_I g \, dx.$$

Folgerung 13.5 *Für Riemann-integrierbares $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$\left| \int_I f \, dx \right| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| \cdot |I|.$$

Satz 13.6 *Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und stimmen f und g auf einer in I dichten Menge überein, so ist bereits*

$$\int_I f \, dx = \int_I g \, dx.$$

13.2 Integrabilitätskriterien

13.2.1 Charakterisierung über Darboux'sche Integrale

Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Weiter sei Z eine Zerlegung von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_r . Mit den Zahlen

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

definieren wir die Unter- bzw. Obersummen von f bzgl. Z :

$$U(Z, f) := \sum_{k=1}^r m_k |I_k|, \quad O(Z, f) := \sum_{k=1}^r M_k |I_k|$$

und nennen

$$\int_{I^*} f dx := \sup_Z U(Z, f) \quad \text{bzw.} \quad \int_I^* f dx := \inf_Z O(Z, f)$$

das untere bzw. obere Darboux'sche Integral von f . Für einen kurzen Moment wollen wir eine Funktion f *Darboux-integrierbar* nennen, wenn

$$\int_{*I} f dx = \int_I^* f dx.$$

Wie Satz 8.7 beweist man:

Satz 13.7 *Die beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ existiert.*

Durch Übertragung des Beweises von Satz 8.8 (Details siehe Heuser, Analysis II, Satz 199.1) erhält man weiter:

Satz 13.8 *Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und Darboux-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_I f dx = \int_{I^*} f dx = \int_I^* f dx.$$

Folgerung 13.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium) *Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ existiert.*

13.2.2 Charakterisierung über Nullmengen

Ähnlich wie im \mathbb{R}^1 nennen wir eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *Nullmenge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele (offene oder abgeschlossene) Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, welche M überdecken (d.h. $M \subseteq \bigcup_k I_k$) und für die $\sum_k |I_k| < \varepsilon$ ist.

Beispiel Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $j = 1, \dots, n$ ist die Hyperebene

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = c\}$$

eine Nullmenge. Um dies einzusehen, bilden wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Intervall $I_k := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ mit

$$a_i := \begin{cases} -k & \text{für } i \neq j \\ c - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{für } i = j \end{cases}, \quad b_i := \begin{cases} k & \text{für } i \neq j \\ c + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Dann ist $H \subseteq \bigcup_k I_k$ (die Intervalle I_k werden immer „breiter“ und „flacher“) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Es lassen sich die Beweise von Lemma 8.13 (Eigenschaften von Nullmengen) und Satz 8.14 auf den \mathbb{R}^n mit $n > 1$ übertragen. Auch die im Beweis benutzte *Schwankung* einer Funktion f auf einem Intervall I definiert man wie im \mathbb{R}^1 :

$$\Omega_f(I) = \sup_{t \in I} f(t) - \inf_{t \in I} f(t) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in I\}.$$

Satz 13.10 (Lebesguesches Integrabilitätskriterium) *Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf I , wenn sie beschränkt ist und wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet, d.h. wenn f fast überall stetig ist.*

Folgerung 13.11 *Jede auf I stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.*

Folgerung 13.12 *Mit f und g sind auch die Funktionen $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und $f \cdot g$ Riemann-integrierbar auf I .*

Folgerung 13.13 *Sei g Riemann-integrierbar auf I , $g(I) \subseteq [a, b]$ und f stetig auf $[a, b]$. Dann ist auch $f \circ g$ Riemann-integrierbar auf I .*

Beweis Ist $f \circ g$ in $x \in I$ unstetig, so muss auch g in x unstetig sein. Also ist $\Delta(f \circ g) \subseteq \Delta(g)$. Damit ist $\Delta(f \circ g)$ Nullmenge. \blacksquare

Für Riemann-integrierbares f ist also z.B. auch die Funktion $\sqrt[p]{|f(x)|}$ Riemann-integrierbar.

Folgerung 13.14 *Sind f, g Riemann-integrierbar auf I , und sind f, g fast überall gleich, so ist*

$$\int_I f \, dx = \int_I g \, dx.$$

13.3 Der Satz von Fubini

Der nachfolgende Satz gibt uns in vielen Fällen ein bequemes Verfahren in die Hand, Riemann-Integrale auf mehrdimensionalen Intervallen zu berechnen.

Satz 13.15 (Fubini) *Seien $I_k \subseteq \mathbb{R}^k$, $I_l \subseteq \mathbb{R}^l$ abgeschlossene Intervalle und $I := I_k \times I_l \subseteq \mathbb{R}^{k+l} := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Weiter sei die reellwertige Funktion f Riemann-integrierbar auf I , und für jedes $y \in I_l$ existiere das Riemann-Integral*

$$g(y) := \int_{I_k} f(x, y) \, dx.$$

Dann ist die Funktion g auf I_l Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} f(x, y) dx \right) dy. \quad (13.1)$$

Beweis Die Existenz des iterierten Integrals sowie die Identität (13.1) folgen aus dem Satz über iterierte Grenzwerte von Doppelfolgen (= Satz 9.17). Wir sehen uns einige Details des Beweises an.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $Z_k^{(m)}$ eine Zerlegung des Intervalles I_k und $\xi_k^{(m)} = (\xi_{k,i}^{(m)})$ ein zugehöriger Zwischenvektor, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_l^{(n)}$ eine Zerlegung von I_l mit Zwischenvektor $\xi_l^{(n)} = (\xi_{l,j}^{(n)})$. Dann definiert $Z^{(m,n)} := Z_k^{(m)} \times Z_l^{(n)}$ eine Zerlegung von I , und $\xi^{(m,n)} := (\xi_k^{(m)}, \xi_l^{(n)})$ ist ein zugehöriger Zwischenvektor. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S(Z^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}, f) &:= \sum_{(i,j)} f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| |I_{l,i}^{(n)}| \\ &= \sum_j \left(\sum_i f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| \right) |I_{l,i}^{(n)}|. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Seien nun die Zerlegungsfolgen $(Z_k^{(m)})_{m \geq 0}$, $(Z_l^{(n)})_{n \geq 0}$ so beschaffen, dass $|Z_k^{(m)}| \rightarrow 0$ und $|Z_l^{(n)}| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$. Für die Produktzerlegung $Z^{(m,n)}$ gilt dann offenbar $|Z^{(m,n)}| \rightarrow 0$ für $(m, n) \rightarrow \infty$. Da f auf I Riemann-integrierbar ist, konvergiert die linke Seite von (13.2) für $(m, n) \rightarrow \infty$ gegen $\int_I f(x, y) d(x, y)$. Außerdem wissen wir aus der Voraussetzung, dass für $m \rightarrow \infty$ für jedes feste $\xi_{l,j}^{(n)}$ der Klammerterm auf der rechten Seite von (13.2) konvergiert:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| = \int_{I_k} f(x, \xi_{l,j}^{(n)}) dx = g(\xi_{l,j}^{(n)}).$$

Nach dem erwähnten Satz 9.17 existiert dann auch der iterierte Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j g(\xi_{l,j}^{(n)}) |I_{l,j}^{(n)}| = \int_{I_l} g(y) dy = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} g(x, y) dx \right) dy$$

und stimmt mit

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} S(Z^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}, f) = \int_I f(x, y) d(x, y)$$

überein. ■

Folgerung 13.16 (Satz über Vertauschung der Integrationsreihenfolge)
Die Bezeichnungen seien wie in Satz 13.15. Ist f auf $I = I_k \times I_l$ Riemann-integrierbar, und existieren die Integrale

$$\int_{I_k} f(x, y) dx \text{ für jedes } y \in I_l \quad \text{und} \quad \int_{I_l} f(x, y) dy \text{ für jedes } x \in I_k,$$

so existieren alle iterierten Integrale, und es gilt

$$\int_{I_k} \left(\int_{I_l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} f(x, y) dx \right) dy = \int_I f(x, y) d(x, y).$$

Für stetiges f wissen wir dies bereits aus Satz 10.29. Durch wiederholtes Anwenden des Satzes von Fubini und von Folgerung 13.16 erhalten wir:

Folgerung 13.17 *Ist f stetig auf $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, so ist*

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots \right) dx_1.$$

Dabei darf die Reihenfolge der Integrationen noch beliebig vertauscht werden.

Beispiel Auf $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ sei $f(x, y, z) := xyz$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 yz dy dz = \frac{1}{4} \int_0^1 z dz = \frac{1}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.4 Integration über Jordan-messbaren Mengen

In diesem Abschnitt geht es um die Integration auf komplizierteren Mengen als Intervallen. Für jede nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_B(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \notin B, \end{cases}$$

d.h. f_B setzt die Funktion f durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort.

Definition 13.18 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und $I \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$. Die Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf B , wenn die Funktion f_B Riemann-integrierbar auf I ist. In diesem Fall heißt*

$$\int_B f dx := \int_I f_B dx$$

das Riemannintegral von f über B .

Anmerkungen

- Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von I .
- Diese Definition bietet auch im \mathbb{R}^1 etwas Neues, da B kein Intervall sein muss.

Ob eine Funktion f auf einer Menge B integrierbar ist, hängt sowohl von f als auch von B ab. Insbesondere erwartet man von B , dass wenigstens so einfache Funktionen wie $\chi : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi(x) = 1$, Riemann-integrierbar sind. Die entsprechende Funktion

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{wenn } x \notin B \end{cases}$$

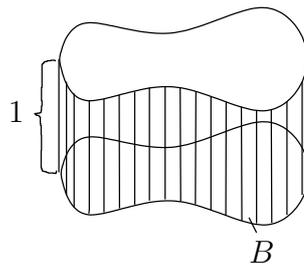
heißt die *charakteristische Funktion von B* .

Definition 13.19 Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_B Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$|B| := \int_I \chi_B dx = \int_B 1 dx = \int_B dx$$

der (n -dimensionale) Jordan-Inhalt von B .

Anschauliche Deutung:

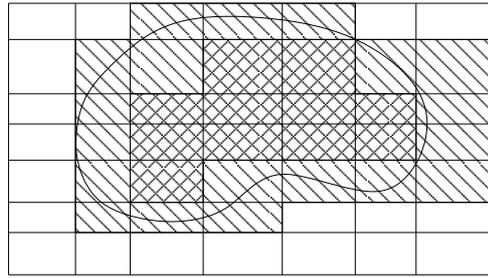


$\int_B 1 dx$ beschreibt das Volumen eines Zylinders über B mit der Höhe 1. Dieses ist gleich Grundfläche \times Höhe, also gleich $|B|$. ■

Deutung über Ober- und Untersummen: Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subseteq I$ und Z eine Zerlegung von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_r . Dann ist

$$\inf_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \text{ ganz in } B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\sup_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \cap B \text{ nicht leer} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



 $O(Z, \chi_B)$
  $U(Z, \chi_B)$

Für die zugehörigen Unter- bzw. Obersummen gilt

$$U(Z, \chi_B) = \sum'_k |I_k|, \quad O(Z, \chi_B) = \sum''_k |I_k|,$$

wobei \sum' bzw. \sum'' über alle k mit $I_k \subseteq B$ bzw. mit $I_k \cap B \neq \emptyset$ erstreckt wird. Die Darboux'schen Integrale

$$\int_{*I} \chi_B dx, \quad \int_I^* \chi_B dx$$

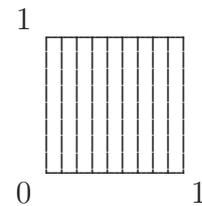
heißen *innerer* bzw. *äußerer Inhalt* von B . Aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium folgt sofort:

Folgerung 13.20 *Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr innerer und ihr äußerer Inhalt übereinstimmen. In diesem Fall ist*

$$|B| = \int_{*I} \chi_B dx = \int_I^* \chi_B dx.$$

Beispiel: Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \text{ rational}\}$. Als „Intervall“ wählen wir z.B. das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

Dann ist für jede Zerlegung Z von $[0, 1] \times [0, 1]$ klar, dass $U(Z, \chi_B) = 0$, $O(Z, \chi_B) = 1$. Also ist der innere Inhalt von B gleich 0 und der äußere gleich 1. B ist also *nicht* Jordan-messbar, und wir schreiben B *keinen* Flächeninhalt zu



Eine Anwendung des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums liefert sofort

Satz 13.21 *Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.*

Beweis Nach Definition und dem Lebesgueschen Kriterium ist B genau dann Jordan-messbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_B eine Nullmenge ist. Man macht sich leicht klar, dass χ_B genau dann in $x \in \mathbb{R}^n$ unstetig ist, wenn x ein Randpunkt von Ω ist. ■

Satz 13.22 (Allgemeines Lebesguesches Integrabilitätskriterium) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und B sei Jordan-messbar. Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf B Riemann-integrierbar, wenn sie auf B beschränkt und fast überall stetig ist.

Beweis Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subseteq I$. Sei f auf B Riemann-integrierbar. Dann ist f_B auf I Riemann-integrierbar. Nach Satz 13.10 ist f_B beschränkt und fast überall stetig auf I . Dann ist f auch beschränkt und fast überall stetig auf B . Ist umgekehrt f beschränkt und fast überall stetig auf B , so ist f_B beschränkt auf I , und für die Menge der Unstetigkeitsstellen gilt: $\Delta(f_B) \subseteq \Delta(f) \cup \partial B$. Nach Satz 13.21 ist ∂B eine Nullmenge. Also ist $\Delta(f_B)$ Nullmenge, d.h. f_B ist auf I Riemann-integrierbar, und f ist auf B Riemann-integrierbar. ■

Es ist nun klar, dass auch die Folgerungen 13.11 – 13.14 entsprechend für Integrale über Jordan-messbare Mengen gelten. Beispielsweise gilt:

Folgerung 13.23 Stetige Funktionen auf kompakten und Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.

Wir überlegen uns nun, wie das Integral bei fester Funktion f vom Integrationsbereich abhängt. Dazu vereinbaren wir:

$$\int_{\emptyset} f \, dx := 0.$$

Aus Satz 13.21 bzw. dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium folgt sofort: Sind A und B Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar (die Ränder dieser Mengen liegen in $\partial A \cup \partial B$ und sind folglich Nullmengen). Weiter: Ist f auf einer Jordan-messbaren Menge B integrierbar, so ist f auch auf jeder Jordan-messbaren Teilmenge von B integrierbar.

Satz 13.24 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und f auf A und B Riemann-integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{A \cup B} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx = \int_A f \, dx + \int_B f \, dx.$$

Beweis Die Existenz aller Integrale folgt aus den Vorbemerkungen. Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall $A \cap B = \emptyset$ und wählen dazu ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \cup B \subseteq I$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_A f \, dx + \int_B f \, dx &= \int_I f_A \, dx + \int_I f_B \, dx = \int_I (f_A + f_B) \, dx \\ &= \int_I f_{A \cup B} \, dx = \int_{A \cup B} f \, dx. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Im Fall $A \cap B \neq \emptyset$ schreiben wir A , B und $A \cup B$ als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B), \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A), \quad A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung von (13.3)

$$\begin{aligned} \int_A f \, dx + \int_B f \, dx &= \int_{A \cap B} f \, dx + \int_{A \setminus B} f \, dx + \int_{B \setminus A} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx \\ &= \int_{A \cup B} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 13.25 Für Jordan-messbare Mengen A , B gilt

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Folgerung 13.26 Für Jordan-messbare Mengen A , B mit $A \subseteq B$ gilt $|A| \leq |B|$.

Beweis Auf jedem Intervall I mit $B \subseteq I$ gilt $\chi_A \leq \chi_B$ und daher

$$|A| = \int_A dx = \int_I \chi_A \, dx \leq \int_I \chi_B \, dx = \int_B dx = |B|. \quad \blacksquare$$

Wir sagen, dass sich zwei Mengen A , B *nicht überlappen*, wenn sie nur Randpunkte gemeinsam haben, d.h. wenn $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Satz 13.27 Seien A , B sich nicht überlappende Jordan-messbare Mengen, und sei f auf A und B Riemann-integrierbar. Dann ist

$$\int_{A \cup B} f \, dx = \int_A f \, dx + \int_B f \, dx.$$

Beweis Nach Satz 13.24 genügt es zu zeigen, dass $\int_{A \cap B} f \, dx = 0$. Da außerdem gilt:

$$\left| \int_{A \cap B} f \, dx \right| \leq \|f\|_\infty |A \cap B|,$$

genügt es zu zeigen, dass $|A \cap B| = 0$. Da $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$, und da ∂A , ∂B kompakte Nullmengen sind, folgt diese Aussage aus der folgenden Behauptung:

Jede kompakte Nullmenge N ist Jordan-messbar und besitzt den Jordan-Inhalt 0.

Wir beweisen diese Behauptung. Da N Nullmenge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von N durch abzählbar viele offene Intervalle I_1, I_2, \dots mit $|I_1| + |I_2| + \dots < \varepsilon$. Da N kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Intervalle I_1, \dots, I_n die Menge N , und es gilt $|I_1| + \dots + |I_n| < \varepsilon$. Da auch ∂N

von diesen Intervallen überdeckt wird, ist ∂N Nullmenge und daher N Jordan-messbar. Für den Inhalt von N erhalten wir aus Folgerung 13.25 und Folgerung 13.26:

$$|N| \leq \left| \bigcup_{i=1}^n I_n \right| \leq \sum_{i=1}^n |I_n| < \varepsilon.$$

Also ist $|N| \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und folglich $|N| = 0$. ■

Folgerung 13.28 *Für sich nicht überlappende Jordan-messbare Mengen A, B gilt*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Man kann auch leicht die Umkehrung zur im Beweis von Satz 13.27 formulierten Behauptung beweisen: Jede Jordan-messbare Menge mit Inhalt 0 ist Nullmenge.

Folgerung 13.29 *Eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand Jordan-messbar ist und den Inhalt 0 hat.*

Beweis ∂B ist kompakt, und kompakte Mengen sind genau dann Nullmengen, wenn sie Jordan-messbar sind und den Inhalt 0 besitzen. ■

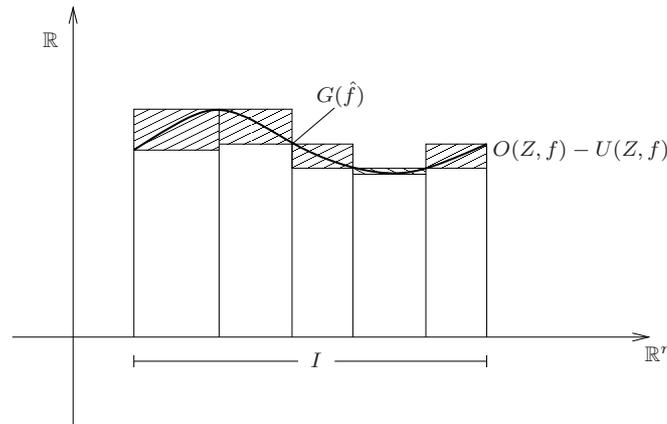
Wir haben nun schon so viel über Jordan-messbare Mengen erfahren, wissen aber immer noch nicht, ob so einfache Mengen wie ein Kreis im \mathbb{R}^2 oder eine Kugel im \mathbb{R}^3 Jordan-messbar sind. Auf Grund von Folgerung 13.29 benötigen wir noch Kriterien dafür, dass eine beschränkte Menge Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt 0 besitzt. Solche Mengen nennen wir auch *Jordansche Nullmengen*. Wir geben zwei solcher Kriterien an.

Satz 13.30 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f , d.h. die Menge*

$$G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, y = f(x)\},$$

eine Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall, welches B umfaßt, und \hat{f} sei die Einschränkung von f_B auf I . Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, \hat{f}) - U(Z, \hat{f}) < \varepsilon$. Damit haben wir sofort eine Überdeckung von $G(\hat{f})$ durch endlich viele abgeschlossene Intervalle mit einer Inhaltssumme $< \varepsilon$. Wegen $G(f) \subseteq G(\hat{f})$ gilt dies erst recht für $G(f)$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■



Beispiel Nun können wir endlich beweisen, dass Kreise, Kugeln, ... Jordan-messbar sind. Zunächst ist $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ Jordan-messbar (Intervall). Auf $[-1, 1]$ sind die Funktionen $f^+(x) := \sqrt{1-x^2}$ und $f^-(x) = -\sqrt{1-x^2}$ stetig und folglich Riemann-integrierbar. Nach Satz 13.30 sind die Graphen

$$G(f^\pm) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y = \pm\sqrt{1-x^2}\}$$

Jordansche Nullmengen. Wegen $G(f^+) \cup G(f^-) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ist die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge. Folgerung 13.29 zeigt, dass dann der Einheitskreis $B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ Jordan-messbar ist. Analog betrachten wir auf der (nun als Jordan-messbar erkannten) Menge B_2 die Funktionen

$$g^\pm(x, y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2} : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

und erhalten wie oben, dass die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 eine Jordansche Nullmenge und damit die Einheitskugel selbst Jordan-messbar ist. Durch vollständige Induktion überträgt man dieses Resultat sofort auf Kugeln im \mathbb{R}^n . ■

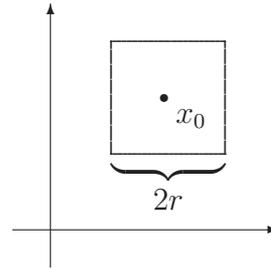
Satz 13.31 Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Falls $m \geq n$, so ist $f(N) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Jordansche Nullmenge.

Lipschitz-stetige Funktionen überführen also Jordansche Nullmengen in Jordansche Nullmengen. Im folgenden Beweis von Satz 13.31 ist es bequem, mit Würfeln statt mit Intervallen zu arbeiten. Ein Intervall $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Würfel*, wenn $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_n - a_n$. Die Zahl $b_1 - a_1$ heißt dann *Kantenlänge des Würfels*. Man kann Würfel im \mathbb{R}^n als Kugeln bezüglich der Maximumnorm

$$\|(x_1, \dots, x_n)^T\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

betrachten: Für jeden Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ ist

$$I := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_\infty \leq r\}$$



der Würfel mit Mittelpunkt x_0 und achsenparallelen Kanten der Länge $2r$. Man überlegt sich leicht, dass sich jede Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^n für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele Würfel I_1, \dots, I_n mit *gleicher* Kantenlänge und mit $\sum |I_i| < \varepsilon$ überdecken läßt (genauer: Heuser, Analysis II, S. 462).

Beweis von Satz 13.31 Da sich Würfel bequem mit der Maximumnorm beschreiben lassen, arbeiten wir sowohl in \mathbb{R}^n als auch in \mathbb{R}^m mit Norm $\|\cdot\|_\infty$. Nach Voraussetzung gibt es ein $L > 0$, so dass

$$\|g(x) - g(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \quad \text{für alle } x, y \in N.$$

(Die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion ist unabhängig von der gewählten Norm. Die Lipschitz-Konstante L hängt dagegen sehr wohl von der Norm ab.) Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ überdecken wir N durch die k Würfel

$$I_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi_i\|_\infty \leq r\}, \quad i = 1, \dots, k$$

mit den Mittelpunkten ξ_i und der Kantenlänge $2r < 1$ so, dass $\sum_{i=1}^k |I_i| = k(2r)^n < \varepsilon$. Da $N = \bigcup_{i=1}^k (N \cap I_i)$, ist $g(N) = \bigcup_{i=1}^k g(N \cap I_i)$ (\nearrow Übung).

Aus jeder Menge $N \cap I_i$ wählen wir einen festen Punkt η_i . Für jedes $x \in N \cap I_i$ ist dann

$$\|x - \eta_i\|_\infty \leq \|x - \xi_i\|_\infty + \|\xi_i - \eta_i\|_\infty \leq 2r,$$

woraus mit der Lipschitz-Stetigkeit von g folgt:

$$\|g(x) - g(\eta_i)\|_\infty \leq L\|x - \eta_i\|_\infty \leq 2rL.$$

Folglich ist $g(N \cap I_i)$ enthalten im Würfel mit Mittelpunkt $g(\eta_i)$ und mit der Kantenlänge $4rL$. Die Menge $g(N)$ kann also durch k Würfel überdeckt werden, für deren Inhaltssumme gilt:

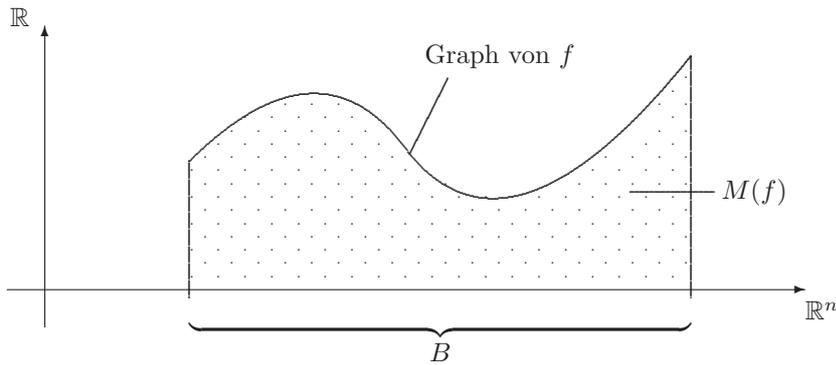
$$k(4rL)^m = k \cdot (2r)^n (2r)^{-n} (4rL)^m = L^m (2r)^{m-n} 2^m \cdot k(2r)^n < (2L)^m \varepsilon$$

(beachte: $2r < 1$, $m - n \geq 0$). Also ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge. \blacksquare

13.5 Inhalt von Ordinatenmengen

Nachdem wir nun wissen, dass Kreise im \mathbb{R}^2 Jordan-messbar sind, möchten wir nun auch den Flächeninhalt von Kreisen berechnen. Allgemeiner geht es darum, Jordan-Inhalte so genannter Ordinatenmengen zu bestimmen. Die *Ordinatenmenge* $M(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist die Menge

$$M(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



Im Fall $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ haben wir als Flächeninhalt von $M(f)$ definiert:

$$\text{Inhalt von } M(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Wir zeigen nun, dass der so definierte Flächeninhalt mit dem Jordanschen Inhalt von $M(f)$ übereinstimmt.

Satz 13.32 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f \geq 0$. Dann ist die Menge $M(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar, und es gilt

$$|M(f)| = \int_B f dx.$$

Beweis Wir beweisen zuerst die Jordan-Messbarkeit von $M(f)$. Dazu müssen wir zeigen, dass $\partial M(f)$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} ist.

Sei $S := \sup_{x \in B} f(x)$. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ liegt sicher im Inneren von $M(f)$, wenn x im Inneren von B liegt, $0 < y < f(x)$ ist, und f in x stetig ist. Also ist $\partial M(f)$ sicher in der Vereinigung der folgenden Mengen enthalten:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, 0) : x \in B\}, \\ A_2 &= \{(x, f(x)) : x \in B\}, \\ A_3 &= \{(x, y) : x \in \partial B, 0 \leq y \leq S\}, \\ A_4 &= \{(x, y) : x \in B, f \text{ in } x \text{ unstetig}, 0 \leq y \leq S\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass jede dieser Mengen eine Nullmenge ist. A_1 ist Teil der Hyperebene $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n\}$ und hat daher den Jordan-Inhalt 0 (vgl. das Beispiel aus Abschnitt 13.2.2). A_2 ist der Graph von f und hat nach Satz 13.30 den Jordan-Inhalt 0. Für A_3 geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor und überdecken ∂B durch die n -dimensionalen Intervalle I_1, I_2, \dots mit der Inhaltssumme $\sum |I_i| < \varepsilon/S$. Dann überdecken die $(n+1)$ -dimensionalen Intervalle $I_1 \times [0, S], I_2 \times [0, S], \dots$ die Menge A_3 , und für deren Inhaltssumme gilt: $\sum |I_i \times [0, S]| < \varepsilon/S \cdot S = \varepsilon$. Da die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, können wir auf analoge Weise zeigen, dass auch A_4 Nullmenge ist. Damit ist die Jordan-Messbarkeit von $M(f)$ klar.

Für die Inhaltsformel sei I ein Intervall, welches B umfasst. Dann liegt $M(f)$ im Intervall $I \times [0, S]$, und es gilt nach Fubini:

$$\begin{aligned} |M(f)| &= \int_{I \times [0, S]} \chi_{M(f)} d(x, y) = \int_I \left(\int_0^S \chi_{M(f)}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_I \left(\int_0^{f_B(x)} 1 dy \right) dx = \int_I f_B(x) dx = \int_B f dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Offenbar gilt auch die folgende Verallgemeinerung von Satz 13.32.

Satz 13.33 Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und sei $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in B$. Dann ist die Menge

$$M(f_1, f_2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Jordan-messbar, und es ist

$$|M(f_1, f_2)| = \int_B (f_2 - f_1) dx.$$

Beispiel Seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ sowie $B = [x_0 - r, x_0 + r]$, und sei

$$f_1(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \quad f_2(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}.$$

Dann ist $M(f_1, f_2)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r . Für ihren Inhalt finden wir

$$\begin{aligned} |M(f_1, f_2)| &= 2 \int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{r^2 - t^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{t}{r} \right] \Big|_{-r}^r = \pi r^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.6 Integration über Normalbereiche

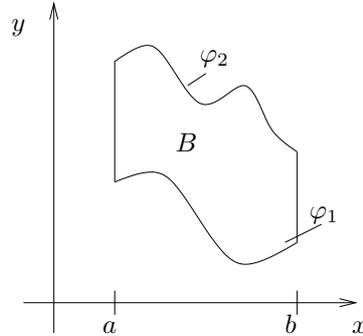
Unter einem *Normalbereich bzgl. der x -Achse* versteht man eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \quad (13.4)$$

wobei φ_1, φ_2 stetige Funktionen auf $[a, b]$ mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$ sind.

Satz 13.34 Sei B wie in (13.4) und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\int_B f d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

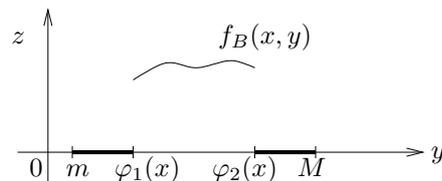


Beweis Sei $I := [a, b] \times [m, M]$ ein Rechteck, welches B umfaßt. Nach Fubini ist

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_m^M f_B(x, y) dy dx.$$

Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist offenbar

$$\int_m^M f_B(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

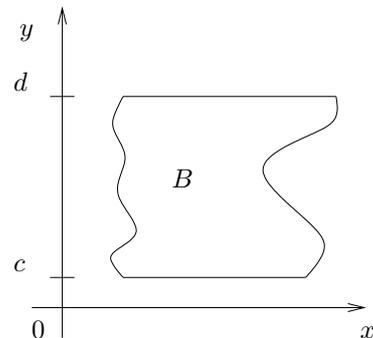


Analog heißt

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ein Normalbereich bezüglich der y -Achse, und es gilt

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$



Ganz ähnlich erklärt man Normalbereiche im \mathbb{R}^3 .

Sei $B_1 := [a, b]$. Auf B_1 sind stetige Funktionen φ_1, ψ_1 gegeben mit $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in B_1$. Dann sei

$$B_2 := \{(x, y) : x \in B_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Auf B_2 sind stetige Funktionen φ_2, ψ_2 gegeben mit $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ für alle $(x, y) \in B_2$. Dann ist

$$B_3 := \{(x, y, z) : (x, y) \in B_2, \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Normalbereich in \mathbb{R}^3 , und es gilt

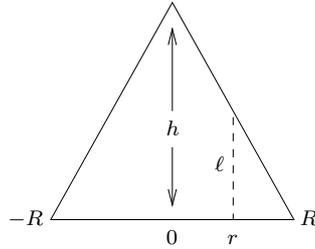
$$\int_{B_3} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Beispiel Ein Kreiskegel mit Radius R und Höhe h ist ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 . Wir haben etwa

$$B_1 = [-R, R],$$

$$B_2 = \{(x, y) : x \in [-R, R], -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \\ (= \text{Grundfläche des Kegels}),$$

$$B_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in B_2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$



(Beachte: (x, y) hat von $(0, 0)$ den Abstand $r := \sqrt{x^2 + y^2}$.) Die Länge ℓ der gestrichelten Strecke ist nach dem Strahlensatz

$$h : R = \ell : (R - r) \quad \text{bzw.} \quad \ell = \frac{hR - hr}{R} = h - \frac{h}{R}r.$$

Für das Volumen dieses Kegels finden wir daher

$$\begin{aligned} V &= \int_{B_3} d(x, y, z) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \\ &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right) dy dx \\ &= \int_{-R}^R \left(hy - \frac{h}{R} \left(\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2} \ln(y + \sqrt{x^2+y^2}) \right) \right) \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= \int_{-R}^R \left(2h\sqrt{R^2-x^2} - h\sqrt{R^2-x^2} - \frac{x^2 h}{2R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2-x^2}}{R - \sqrt{R^2-x^2}} \right) dx \\ &= 2h \int_0^R \left(\sqrt{R^2-x^2} - \frac{x^2}{2R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2-x^2}}{R - \sqrt{R^2-x^2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Wir substituieren $x = R \sin t$, $dx = R \cos t dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} V &= 2h \int_0^{\pi/2} \left(R \cos t - \frac{R}{2} \sin^2 t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) R \cos t dt \\ &= 2hR^2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) dt. \end{aligned}$$

Das Integral $\sin^2 t \cos t \ln \frac{1+\cos t}{1-\cos t}$ kann durch partielle Integration bestimmt werden (der Faktor $\sin^2 t \cos t$ wird integriert und liefert $\frac{1}{3} \sin^3 t$, der Faktor $\ln \frac{1+\cos t}{1-\cos t}$ wird differenziert und ergibt $\frac{-2}{\sin t}$). Eingesetzt findet man schließlich

$$V = 2hR^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \right),$$

also

$$V = \frac{1}{3} \pi h R^2. \quad \blacksquare$$

13.7 Die Substitutionsregel

Nach dieser aufwändigen Rechnung für ein elementares Resultat fragt man sich, ob man nicht von vornherein die Rechnung hätte vereinfachen können durch eine andere Beschreibung des Kegels, etwa in Zylinderkoordinaten (die Substitutionsregel haben wir ja ohnehin verwenden müssen). Beschreiben wir die Grundfläche in Polarkoordinaten, so wird der Kegel offenbar beschrieben durch

$$\left\{ (r, \varphi, z) : r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in \left[0, h - \frac{h}{R}r\right] \right\},$$

was eine wesentlich einfachere Integration erwarten läßt. *Problem:* Wie haben wir im Integral $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ den Ausdruck $d(x, y, z)$ zu transformieren, wenn wir von (x, y, z) zu neuen Koordinaten, etwa r, φ und z , übergehen?

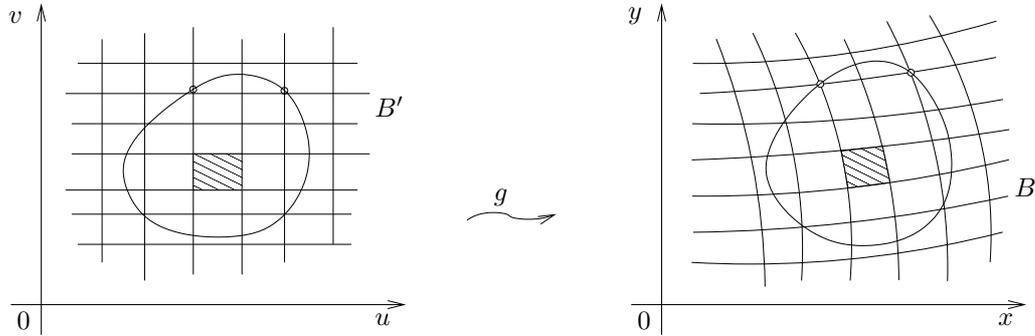
A Motivation. Zu berechnen ist das Integral

$$\int_B f(x, y) d(x, y)$$

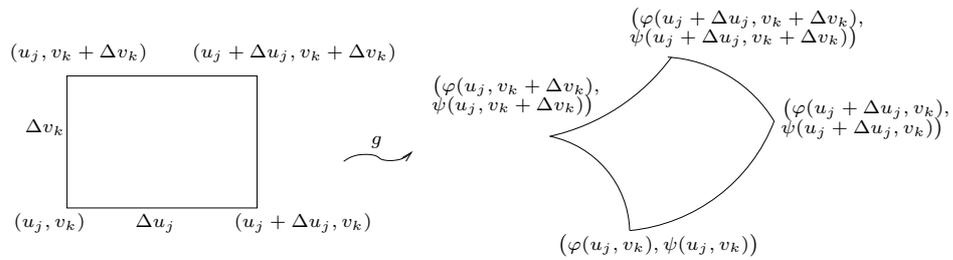
über einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$, versehen mit x, y -Koordinaten. Die Substitution $x := \varphi(u, v)$, $y := \psi(u, v)$ führt neue Veränderliche ein. Durch diese Substitution werde ein Bereich $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten u, v (wir sagen auch: ein Bereich der uv -Ebene) injektiv auf B abgebildet; genauer: die Abbildung

$$g : B' \rightarrow B, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto g(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix}$$

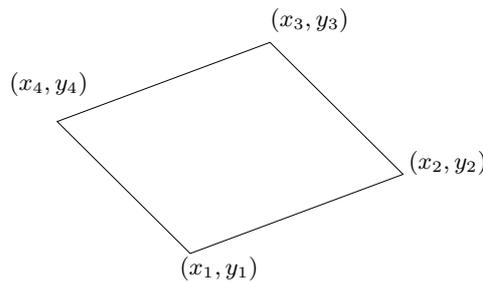
ist eine Bijektion von B' auf B . Diese Abbildung übersetzt ein Rechtecknetz über B' in ein „krummliniges Netz“ über B :



Wir sehen uns genauer an, wie das schraffierte Rechteck in der uv -Ebene auf das „krummlinige“ Parallelogramm (ebenfalls schraffiert) in der xy -Ebene abgebildet wird:

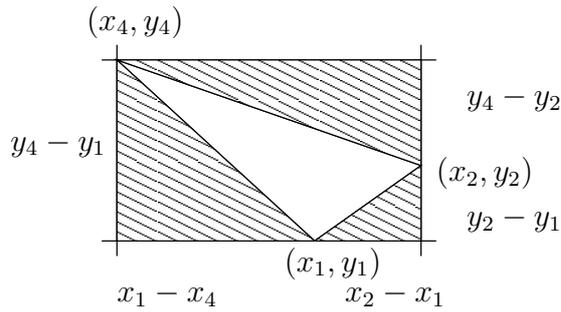


Der Flächeninhalt dieses Rechtecks (wie er in der Definition des Riemann-Integrals über B' auftritt) ist $\Delta u_j \Delta v_k$. Um den Flächeninhalt des „krummlinigen“ Parallelogramms zu berechnen, nehmen wir an, dass Δu_j und Δv_k so klein sind, dass das „krumme“ Parallelogramm fast ein echtes Parallelogramm ist. Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Eckpunkten $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ gilt



$$\text{Fläche} = |(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)|. \quad (13.5)$$

Dies lässt sich leicht ableiten, indem man z.B. von der unten gezeichneten Rechteckfläche die schraffierten Dreiecksflächen subtrahiert:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ Parallelogrammfläche} &= \text{Fläche des weißen Dreiecks} \\ &= (y_4 - y_1)((x_2 - x_1) + (x_1 - x_4)) - \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1 - x_4)(y_4 - y_1) - \frac{1}{2}(y_4 - y_2)(x_2 - x_4). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Determinanten läßt sich (13.5) schreiben als

$$\text{Fläche} = \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \right|.$$

Die Fläche unseres „krummen“ Parallelogramms ist also ungefähr gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) & \varphi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \varphi(u_j, v_k) \\ \psi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \psi(u_j, v_k) & \psi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \psi(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right|.$$

Wir nehmen nun an, dass φ und ψ differenzierbar sind. Für kleines Δu_j ist dann

$$\varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) \cdot \Delta u_j.$$

Der Ausdruck (13.4) ist daher ungefähr gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_j, v_k) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right| \Delta u_j \Delta v_k.$$

Die hier stehende Matrix ist aber nichts anderes als die Jacobi-Matrix von g an der Stelle (u_j, v_k) . Mit anderen Worten: (13.4) ist etwa gleich

$$|\det g'(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \Delta v_k.$$

Wir erwarten daher die Näherungsgleichung

$$\int_B f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{j,k} f(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) |\det g'(u_j, v_k)| \Delta u_j \Delta v_k$$

und hieraus die Substitutionsregel

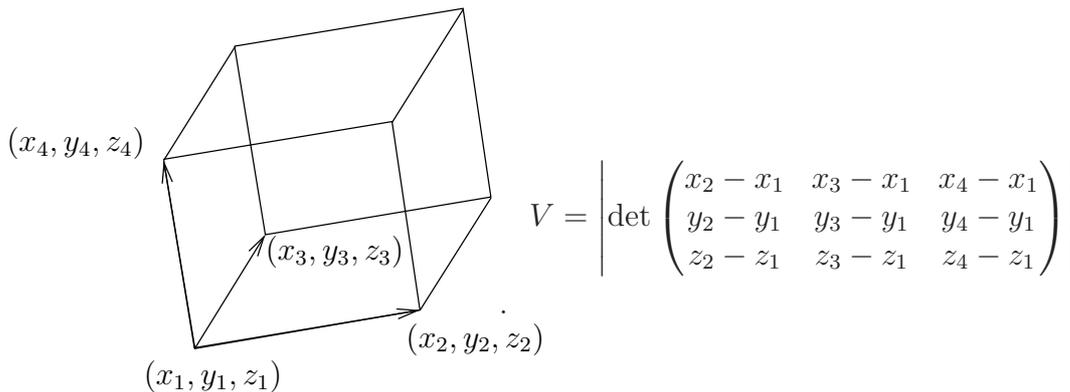
$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{B'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v).$$

Es zeigt sich, dass die hier „abgeleitete“ Formel unter entsprechenden Voraussetzungen tatsächlich gilt und dass sie auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert werden kann.

B Determinanten und Volumina von Parallelepipeden. Mit der Determinanten einer 3×3 -Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

kann man das Volumen eines Parallelepipeds im \mathbb{R}^3 beschreiben:



Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix wird z.B. rekursiv definiert. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine $n \times n$ -Matrix, und A_{ij} sei die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Dann definiert man:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix steht wie oben in engem Zusammenhang zum Volumen eines Parallelepipeds im \mathbb{R}^n .

C Der allgemeine Substitutionssatz

Satz 13.35 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig differenzierbar. Die Determinante $\det g'(t)$ sei auf G entweder überall positiv oder überall negativ. Weiter sei T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von G , und f sei eine auf $g(T)$ stetige reellwertige Funktion. Dann ist $g(T)$ wieder kompakt und Jordan-messbar, f ist auf $g(T)$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f(g(t)) |\det g'(t)| dt. \quad (13.6)$$

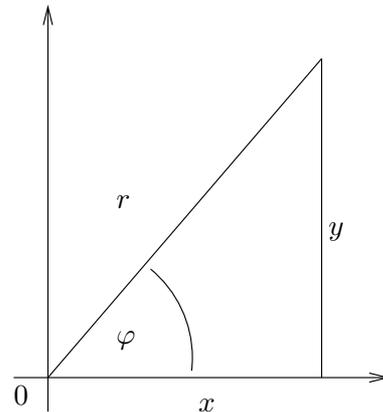
Die Formel (13.6) gilt auch dann noch, wenn – entgegen den obigen Voraussetzungen – die Determinante $\det g'(t)$ auf einer Teilmenge N von T verschwindet oder wenn $g|_N$ auf einer Teilmenge N von T nicht injektiv ist, sofern N den Jordan-Inhalt 0 hat.

Der Beweis kann z.B. mit vollständiger Induktion nach n erfolgen, ist aber recht aufwändig (vgl. Heuser, S. 475–485).

D Beispiele: Transformation auf Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Polarkoordinaten Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Ein Integral gemäß Satz 13.35 auf Polarkoordinaten zu transformieren heißt die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

vorzunehmen. Es ist

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und

$$\det g'(r, \varphi) = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - (-r \sin \varphi) \sin \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Für $r > 0$ ist also $\det g'(r, \varphi)$ stets positiv. Weiter ist klar, dass g den Bereich

$$\{(r, \varphi) : r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

injektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abbildet und dass g insbesondere auf dem Gebiet

$$G := \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

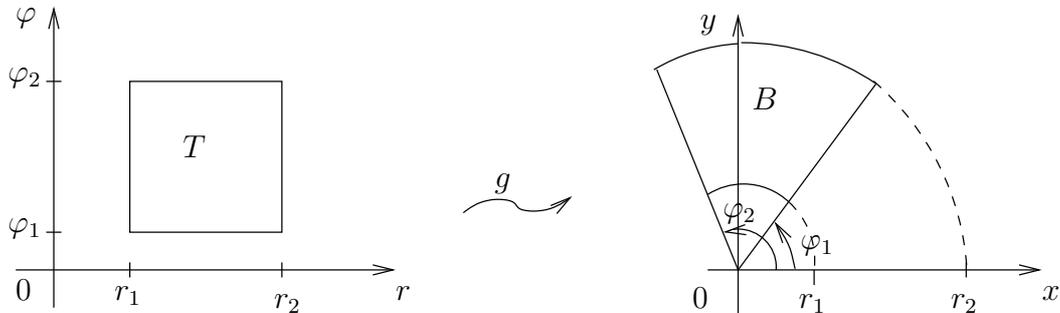
injektiv ist. Auf diesem Gebiet können wir also Satz 13.35 anwenden, und es folgt:

Folgerung 13.36 *Ist $B = g(T)$, wobei $T \subseteq G$ kompakt und Jordan-messbar ist, so kann $\int_B f(x, y) d(x, y)$ auf Polarkoordinaten transformiert werden, und es gilt*

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi). \quad (13.7)$$

Ist beispielsweise T ein Rechteck in G , so ist $B = g(T)$ ein Kreisring, und wir haben nach Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (13.8)$$



In der Praxis ist T häufig ein Rechteck, welches im Streifen

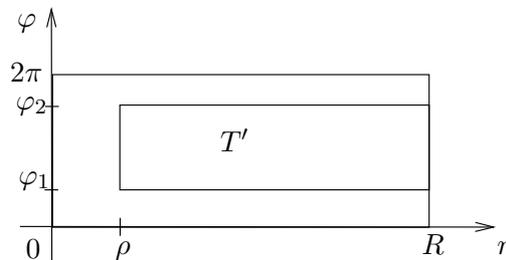
$$\{(r, \varphi) : r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

liegt und Teile des Randes dieses Streifens enthält. Wir überlegen uns, dass die Formel (13.8) auch in diesem Fall noch gilt. Dazu sei

$$T = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

und $T' \subseteq T$ sei ein Rechteck der Gestalt

$$T' = \{(r, \varphi) : \varrho \leq r \leq R, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\} \quad \text{mit } \varrho > 0 \text{ und } 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi.$$



Auf T' gilt (13.8), d.h. es ist

$$\int_{g(T')} f(x, y) d(x, y) = \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi),$$

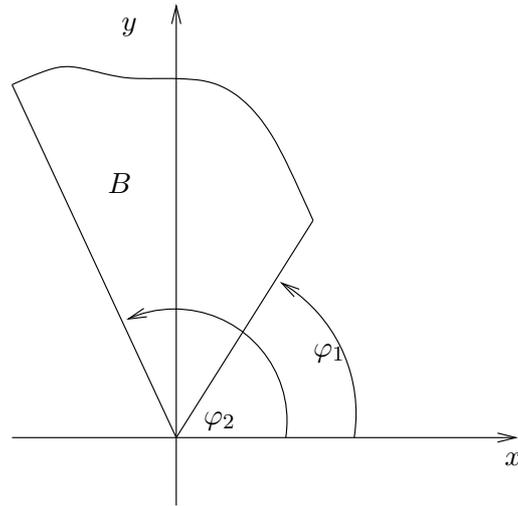
und aus

$$\begin{aligned} & \left| \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) - \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &= \left| \int_{T \setminus T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &\leq \sup_{r, \varphi} |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r| \cdot |T \setminus T'| \end{aligned}$$

folgt, dass $\int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$ gegen $\int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$ strebt, wenn $\varrho \rightarrow 0$, $\varphi_1 \rightarrow 0$ und $\varphi_2 \rightarrow 2\pi$. Ähnlich erhält man, dass auch $\int_{g(T')} f(x, y) d(x, y)$ gegen $\int_{g(T)} f(x, y) d(x, y)$ strebt. Zusammengefasst:

Folgerung 13.37 Ist T ein Rechteck $[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 \leq r_1 < r_2$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, und ist f auf $g(T) = B$ stetig, so gilt (13.8).

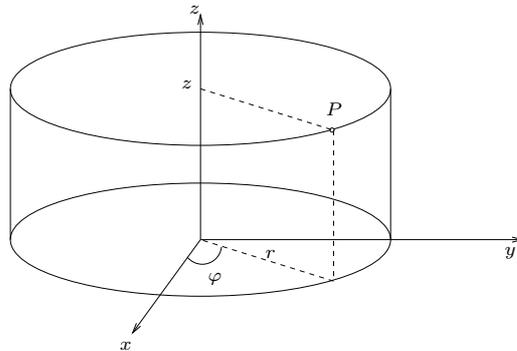
Anwendung: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte (r, φ) mit $0 \leq r \leq \varrho(\varphi)$ und $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, wobei ϱ auf $[\varphi_1, \varphi_2]$ stetig und positiv sei. Dann ist der Inhalt von B gleich



$$|B| = \int_B 1 d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi. \quad \blacksquare$$

Zylinderkoordinaten Die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z) sind:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$



Für die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gilt}$$

$$\det g'(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Ähnlich wie bei Polarkoordinaten sieht man, dass die Substitutionsformel

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z) \quad (13.9)$$

sicher immer dann gilt, wenn T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge des Gebietes

$$G = \{(r, \varphi, z) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$$

und $B = g(T)$ ist. Die Formel (13.9) gilt aber auch dann noch, wenn T ein Quader

$$T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2] \text{ mit } 0 \leq r_1 < r_2, 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$$

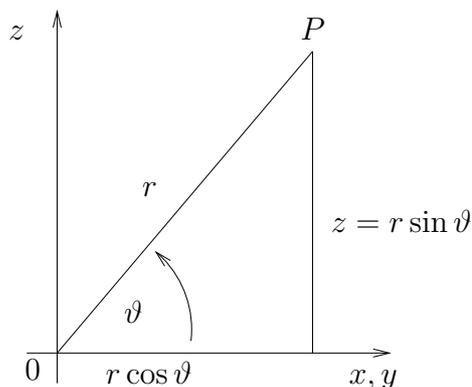
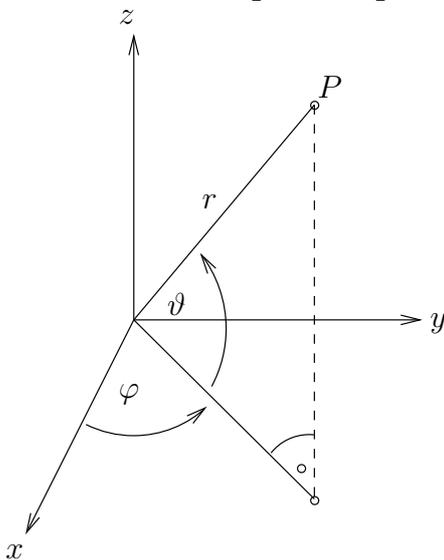
ist. In diesem speziellen Fall geht (13.9) über in

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Kugelkoordinaten Der Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ wird hergestellt durch

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \sin \vartheta;$$

dabei ist $r \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi$.



Für die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

findet man

$$\det g'(r, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix} = -r^2 \cos \vartheta.$$

Diese Determinante ist stets negativ, wenn $r > 0$ und $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Wie oben gilt für stetiges f die Transformationsformel

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \vartheta, \varphi),$$

wenn $B = g(T)$ und T kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von

$$G = \{(r, \vartheta, \varphi) : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

ist. Diese Formel gilt auch dann noch, wenn

$$T = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$$

mit $0 \leq r_1 < r_2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ ist. Insbesondere ist dann nach Fubini

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel (Volumen einer Kugel)

Die Kugel B mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius R ist das Bild des Quaders

$$T = [0, R] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

unter der oben beschriebenen Transformation. Wir finden daher

$$\begin{aligned} V = \int_B d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Man vergleiche diese Rechnung mit der mühsamen Herleitung der Formel für das Kegelvolumen in Abschnitt 13.6.