

## 12 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten

Wir wenden uns nun einer der typischen Aufgaben der Mathematik zu, dem Lösen von Gleichungen. Sind  $X, Y$  geeignete Mengen und ist  $F : X \rightarrow Y$  eine entsprechende Abbildung, so sind in Verbindung mit der Gleichung  $F(x) = y$  folgende Fragen von Interesse:

- Für welche  $y \in Y$  hat die Gleichung  $F(x) = y$  eine Lösung  $x \in X$ ?
- Wenn die Gleichung  $F(x) = y$  für ein  $y \in Y$  lösbar ist, wieviele Lösungen hat sie dann?
- Falls die Gleichung  $F(x) = y$  für alle  $y \in Y$  eindeutig lösbar ist, wie hängen dann die Lösungen  $x$  von den rechten Seiten  $y$  ab? Ist diese Abhängigkeit stetig oder gar differenzierbar?
- Falls die Gleichung  $F(x) = y$  mehrere Lösungen besitzt, wie kann man dann die Menge aller Lösungen geeignet darstellen?
- Wie findet man Lösungen?

Die erste Frage ist eng mit der Surjektivität von  $F$  verknüpft, und die zweite mit der Injektivität. Ist  $F$  surjektiv und injektiv (also bijektiv), so besitzt  $F$  eine Umkehrabbildung  $F^{-1}$ , und der dritte Punkt fragt nach der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von  $F^{-1}$ . Schließlich wird uns die vierte Frage auf den Begriff einer Mannigfaltigkeit führen.

Wir wollen insbesondere sehen, inwieweit die uns zugänglichen Mittel der Analysis bei der Beantwortung dieser Fragen helfen. Wir betrachten deshalb meist differenzierbare Funktionen  $F : U \rightarrow V$ , wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Mengen sind. Beginnen werden wir aber mit einem Resultat, das nicht auf diesen Rahmen beschränkt ist.

### 12.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  heißt *Kontraktion*, wenn es eine Zahl  $L < 1$  (die *Kontraktionskonstante*) so gibt, dass

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Kontraktionen sind Lipschitz-stetig und insbesondere stetig. Ein Punkt  $x \in X$  heißt *Fixpunkt* von  $f : X \rightarrow X$ , wenn  $f(x) = x$ . Für die identische Abbildung von  $X$  ist jeder Punkt ein Fixpunkt.

**Satz 12.1 (Banachscher Fixpunktsatz)** *Sei  $(X, d)$  ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Kontraktion mit einer Kontraktionskonstanten  $L$ . Dann gilt*

- (a) die Abbildung  $f$  besitzt genau einen Fixpunkt  $x^*$ .
- (b) für jeden Startvektor  $x_0 \in X$  konvergiert die durch  $x_n := f(x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ , definierte Folge  $(x_n)$  gegen  $x^*$ .
- (c)  $d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$ .

**Beweis** Sei  $x_0 \in X$  und  $x_n := f(x_{n-1})$  für  $n \geq 1$ . Wir zeigen, dass  $(x_n)$  eine Cauchyfolge ist. Für  $m \geq 1$  haben wir

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (1 + L + \dots + L^{m-1}) d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \frac{1 - L^m}{1 - L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{1 - L} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Wegen  $0 \leq L < 1$  wird die rechte Seite kleiner als jedes vorgegebene  $\varepsilon > 0$ , wenn nur  $n$  hinreichend groß ist. Also ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge. Da  $X$  vollständig ist, konvergiert  $(x_n)$  gegen ein  $x^* \in X$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt schließlich

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^* ;$$

$x^*$  ist also Fixpunkt von  $f$ . Die Abbildung  $f$  kann keine weiteren Fixpunkte besitzen. Aus  $x^* = f(x^*)$  und  $y^* = f(y^*)$  folgt nämlich

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq L d(x^*, y^*),$$

also  $d(x^*, y^*) = 0$ . Die in (c) angegebenen Abschätzungen folgen sofort aus

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{1}{1-L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1),$$

wenn man  $m \rightarrow \infty$  streben läßt. ■

Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis, das Ihnen auch in anderen Situationen wiederbegegnen wird (z.B. in der Vorlesung über Differentialgleichungen im 3. Semester). In der numerischen Mathematik ist der Banachsche Fixpunktsatz ein Instrument, um die Konvergenz von Näherungsverfahren zu beweisen und Lösungen von Fixpunktgleichungen näherungsweise zu berechnen.

**Beispiel 1** Sei  $X$  das Stadtgebiet von Darmstadt (das wir als abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  auffassen und das deshalb vollständig ist). Irgendwo in Darmstadt breiten wir einen Stadtplan von Darmstadt aus und erklären eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  wie folgt. Jedem Punkt  $x \in X$  wird derjenige Punkt  $f(x) \in X$  zugeordnet, über dem das Bild von  $x$  auf dem Stadtplan liegt. Ist  $1 : n$  der Maßstab

des Stadtplans, so ist  $f$  eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten  $L = 1/n$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Punkt  $x$  in Darmstadt mit  $f(x) = x$ , d.h.  $x$  liegt genau unter demjenigen Punkt des Stadtplanes, der  $x$  abbildet. ■

**Beispiel 2** Sei  $A \in L(\mathbb{R}^n)$  eine lineare Abbildung mit  $\|A\| < 1$ . Wir wollen die lineare Gleichung

$$(I - A)x = y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (12.1)$$

lösen. Dazu betrachten wir die Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $z \mapsto Az + y$ , mit der wir (12.1) als Fixpunktgleichung  $f(x) = x$  schreiben können. Wegen

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| = \|(Az_1 + y) - (Az_2 + y)\| = \|A(z_1 - z_2)\| \leq \|A\| \|z_1 - z_2\|$$

ist  $f$  eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten  $\|A\| < 1$ . Nach Satz 12.1 hat  $f$  genau einen Fixpunkt, d.h. die Gleichung (12.1) hat genau eine Lösung in  $\mathbb{R}^n$ . Diese können wir näherungsweise berechnen. Wir wählen z.B.  $x_0 = y$  als Startvektor. Dann ist

$$x_1 = f(x_0) = Ay + y, \quad x_2 = f(x_1) = Ax_1 + y = A(Ay + y) + y = A^2y + Ay + y$$

und allgemein, mit  $A^0 =: I$ ,

$$x_n = \sum_{k=0}^n A^k y \quad \text{für } n \geq 1.$$

Folglich ist

$$(I - A)^{-1}y = x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y.$$

Man kann auch leicht direkt beweisen, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  in  $L(\mathbb{R}^n)$  konvergiert (die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$  ist eine konvergente Majorante) und dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \quad \text{für } \|A\| < 1.$$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  heißt die *Neumann-Reihe* von  $A$ . ■

## 12.2 Der Satz über die Umkehrfunktion

Wir sehen uns nun an, wie man den Satz über die Umkehrfunktion auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert.

**Definition 12.2** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. Eine Bijektion  $f : U \rightarrow V$  heißt Diffeomorphismus, wenn sowohl  $f$  als auch die Umkehrabbildung  $f^{-1} : V \rightarrow U$  stetig differenzierbar sind.

**Lemma 12.3** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $f : U \rightarrow V$  eine stetig differenzierbare Funktion mit differenzierbarer Umkehrfunktion. Dann gilt:

(a) für jedes  $x \in U$  ist  $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  invertierbar, und

$$(f'(x))^{-1} = (f^{-1})'(f(x)). \quad (12.2)$$

(b)  $m = n$ .

(c)  $f : U \rightarrow V$  ist ein Diffeomorphismus.

**Beweis** Sei  $x \in U$  und  $y = f(x)$ . Mit der Kettenregel folgt aus  $f^{-1} \circ f = id_U$  und  $f \circ f^{-1} = id_V$ , dass

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^n} &= (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x), \\ id_{\mathbb{R}^m} &= (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)). \end{aligned}$$

Also ist  $f'(x)$  invertierbar, und es gilt (12.2). Aus der Invertierbarkeit von  $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  folgt weiter  $m = n$  (lineare Algebra). Schließlich ist

$$(f^{-1})' : V \rightarrow L(\mathbb{R}^n), \quad y \mapsto (f'(f^{-1}(y)))^{-1}. \quad (12.3)$$

Um (c) zu zeigen, müssen wir die Stetigkeit dieser Funktion zeigen. Nach Voraussetzung sind  $f^{-1}$  und  $f'$  stetig. Damit ist auch ihre Verkettung  $f' \circ f^{-1}$  stetig, und wir müssen noch die Stetigkeit der Abbildung

$$GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto A^{-1} \quad (12.4)$$

zeigen, wobei  $GL(\mathbb{R}^n)$  für die Gruppe der invertierbaren Abbildungen aus  $L(\mathbb{R}^n)$  steht. Dies folgt leicht aus der expliziten Formel zur Berechnung der inversen Matrix von  $A$ , wonach  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$  mit

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n \quad \text{und} \quad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Hier ist  $A_{ji}$  diejenige Untermatrix von  $A$ , die durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte von  $A$  entsteht. Es ist klar, dass jeder Eintrag von  $\tilde{A}$  (und damit  $\tilde{A}$  selbst) sowie  $\det A$  stetig von (den Einträgen von)  $A$  abhängen. Also ist die Abbildung (12.4) stetig. Damit ist die Stetigkeit von  $(f^{-1})'$  in (12.3) gezeigt. Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist also *stetig* differenzierbar, d.h.  $f$  ist ein Diffeomorphismus. ■

**Anmerkung** Sei  $C^k(U, \mathbb{R}^m)$  die Menge der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Verlangt man in Lemma 12.3 zusätzlich  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ , so kann man  $f^{-1} \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$  zeigen. Dies geschieht wieder mit Hilfe der Darstellung (12.3). Man kann sich überlegen, dass die Abbildung (12.4) sogar beliebig oft differenzierbar ist. ■

**Beispiel** Dieses Beispiel soll noch einmal auf die Unterschiede zwischen Funktionen einer bzw. mehrerer Veränderlicher aufmerksam machen. Sei  $f : U \rightarrow V$  eine stetig differenzierbare und surjektive Funktion, deren Ableitung  $f'(x)$  in jedem Punkt  $x \in U$  invertierbar ist. Sind  $U, V$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$ , so folgt hieraus, dass  $f$  bijektiv ist. Die Invertierbarkeit von  $f'(x)$  bedeutet im Eindimensionalen nämlich gerade, dass  $f'(x) \neq 0$  ist. Ist dies für alle  $x \in U$  der Fall, so ist  $f$  streng monoton, also injektiv. Im Mehrdimensionalen trifft dies jedoch nicht mehr zu, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Die Jacobimatrix

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

hat die Determinante  $r \neq 0$  und ist folglich immer invertierbar. Die Funktion  $f$  ist offenbar auch surjektiv, wegen  $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$  jedoch nicht injektiv. ■

Die Funktion  $f$  aus diesem Beispiel besitzt jedoch eine „lokale Umkehrfunktion“. Ist etwa  $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ , so ist  $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  injektiv, und  $V := f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$  ist offen in  $\mathbb{R}^2$ . Man kann also eine Umkehrfunktion  $f^{-1} : V \rightarrow U$  definieren. Wir wollen uns nun die Differenzierbarkeitseigenschaften solcher „lokaler Umkehrfunktionen“ ansehen.

**Definition 12.4** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ein stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt lokal um  $x \in U$  invertierbar, wenn es offene Umgebungen  $U_1 \subseteq U$  von  $x$  und  $V_1$  von  $f(x)$  so gibt, daß  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$  ein Diffeomorphismus ist. Die Abbildung  $(f|_{U_1})^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$  heißt dann eine lokale Umkehrfunktion von  $f$ . Schließlich heißt  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus, wenn  $f$  um jeden Punkt  $x \in U$  lokal invertierbar ist.

**Satz 12.5 (Satz über Umkehrfunktion)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$ , und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Die Funktion  $f$  ist genau dann um  $x_0$  lokal invertierbar, wenn  $f'(x_0)$  invertierbar ist.

Verlangt man  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ , so folgt aus der Anmerkung nach Lemma 12.3, dass die lokale Umkehrfunktion ebenfalls zu  $C^k$  gehört.

**Beweis** Ist  $f$  um  $x_0$  lokal invertierbar, so folgt die Invertierbarkeit von  $f'(x_0)$  aus Lemma 12.3. Sei umgekehrt  $f'(x_0)$  invertierbar. Wir zeigen, dass dann  $f$  um  $x_0$  lokal invertierbar ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, dass

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) = I \tag{12.5}$$

ist. Andernfalls ersetzen wir  $U$  durch  $\tilde{U} = U - x_0$  und  $f$  durch

$$\tilde{f}(x) := (f'(x_0))^{-1} \cdot (f(x_0 + x) - f(x_0)).$$

Hat man dann eine lokale Umkehrfunktion von  $\tilde{f}$  um  $0 \in \tilde{U}$  gefunden, so ist

$$f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(f'(x_0)^{-1}(y - f(x_0))) + x_0 \quad (12.6)$$

die lokale Umkehrfunktion von  $f$  um  $x_0$ . Aus der Definition von  $\tilde{f}$  folgt nämlich

$$x + x_0 = \tilde{f}^{-1}((f'(x_0))^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))) + x_0,$$

und die Substitution  $f(x_0 + x) = y$  liefert (12.6).

Wir zeigen, dass man unter den Voraussetzungen (12.5) die Gleichung  $f(x) = y$  für kleine  $y$  nach  $x$  auflösen kann. Um den Banachschen Fixpunktsatz benutzen zu können, schreiben wir  $f(x) = y$  als Fixpunktgleichung. Dazu definieren wir

$$g_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto y + (x - f(x)).$$

Es ist klar, dass

$$f(x) = y \quad \text{genau dann, wenn} \quad g_y(x) = x.$$

Wir suchen einen geeigneten vollständigen metrischen Raum  $X$ , auf dem  $g_y$  kontraktiv wirkt. Sei zunächst  $y = 0$  und  $g := g_0$ . Mit  $f$  ist auch  $g$  stetig differenzierbar. Da  $g'(0) = I - I = 0$  ist, gibt es ein  $r > 0$  so, dass

$$U_{2r}(0) \subseteq U \quad \text{und} \quad \|g'(x)\| \leq 1/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x\| \leq r.$$

Sei  $X := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ . Da  $X$  im vollständigen metrischen Raum  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen ist, ist  $X$  selbst vollständig. Nach Satz 10.19 gilt weiter

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\| \quad \text{für alle } x, x' \in X. \quad (12.7)$$

Mit  $x' = 0$  folgt hieraus insbesondere  $\|g(x)\| = \frac{1}{2} \|x\| \leq r/2$  für  $x \in X$ .

Sei nun  $\|y\| \leq r/2$ . Dann ist  $g_y$  wegen  $\|g_y(x)\| \leq \|g(x)\| + \|y\| \leq r$  für alle  $x \in X$  eine Abbildung von  $X$  in  $X$ , die wegen  $g_y(x) - g_y(x') = g(x) - g(x')$  und (12.7) eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten  $1/2$  ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es also für jedes  $y$  mit  $\|y\| \leq r/2$  genau ein  $x$  mit  $\|x\| \leq r$  so, dass  $g_y(x) = x$  bzw.  $f(x) = y$ .

Sei  $U_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r, \|f(x)\| < r/2\}$  und  $V_1 := f(U_1)$ . Wie wir gerade gesehen haben, ist  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$  bijektiv. Es existiert also die Umkehrabbildung  $\varphi := (f|_{U_1})^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$ . Wir zeigen, dass  $U_1$  und  $V_1$  offen sind und  $\varphi$  stetig ist. Für  $U_1$  ist dies klar (Urbilder offener Mengen bzgl. stetiger Abbildungen sind offen). Für  $V_1$  zeigen wir  $V_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < r/2\}$ , woraus die Offenheit von  $V_1$  folgt. Die Inklusion  $\subseteq$  ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei  $\|y\| < r/2$ .

Dann existiert genau ein  $x$  mit  $\|x\| \leq r$  und  $f(x) = y$ . Zu zeigen ist, dass sogar  $\|x\| < r$ . Für beliebige Punkte  $x_1, x_2 \in \overline{U_r(0)}$  ist

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|g(x_1) + f(x_1) - g(x_2) - f(x_2)\| \\ &\leq \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \end{aligned}$$

also

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \quad (12.8)$$

Wir setzen hierin  $x_2 = 0$  und  $x_1 = x$  mit  $f(x) = y$  und  $\|y\| < r/2$ . Dann folgt  $\|x\| \leq 2\|y\| < r$ , also  $x \in U_1$  und  $y \in V_1$ . Schreiben wir noch in (12.8)  $x_1 = \varphi(y_1)$  und  $x_2 = \varphi(y_2)$ , so erhalten wir

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in V_1, \quad (12.9)$$

also die Stetigkeit von  $\varphi$ .

Weiter ist  $f'(x)$  für alle  $x \in U_1$  invertierbar. Für  $x \in U_1$  ist nämlich

$$\|f'(x) - I\| = \|g'(x)\| \leq 1/2,$$

und die Invertierbarkeit von  $f'(x)$  folgt wie am Ende von Abschnitt 12.1 (Neumann-Reihe).

Es verbleibt zu zeigen, dass  $\varphi$  stetig differenzierbar ist. Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit von  $\varphi$ . Sei  $y \in V_1$  und  $\ell$  so, dass  $y + \ell \in V_1$ . Wir setzen  $x = \varphi(y)$  und  $x + h = \varphi(y + \ell)$ , wobei  $h = \varphi(y + \ell) - \varphi(y)$  von  $\ell$  abhängt. Da  $f$  in  $x$  differenzierbar ist, haben wir

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(y + \ell) - \varphi(y) &= (x + h) - x = h \\ &= (f'(x))^{-1}(f(x + h) - f(x) - r(h)) \\ &= (f'(\varphi(y)))^{-1}\ell - (f'(x))^{-1}r(h), \end{aligned}$$

und die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  in  $y$  folgt, wenn wir gezeigt haben, dass  $\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{r(h(\ell))}{\|\ell\|} = 0$ . Nun ist

$$\frac{r(h(\ell))}{\|\ell\|} = \frac{r(h(\ell))}{\|h(\ell)\|} \frac{\|h(\ell)\|}{\|\ell\|} \quad (12.10)$$

(wegen der Bijektivität von  $\varphi$  ist  $h \neq 0$  für  $\ell \neq 0$ ). Wegen  $h = \varphi(y + \ell) - \varphi(y)$  und der Stetigkeit von  $\varphi$  folgt aus  $\ell \rightarrow 0$  auch  $h \rightarrow 0$ . Also ist

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{r(h(\ell))}{\|h(\ell)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0,$$

und der zweite Faktor in (12.10) bleibt wegen (12.9) beschränkt:

$$\|h(\ell)\| = \|\varphi(y + \ell) - \varphi(y)\| \leq 2\|(y + \ell) - y\| = 2\|\ell\|.$$

Also ist  $\varphi$  in  $y \in V_1$  differenzierbar. Die Stetigkeit von  $\varphi'$  folgt aus Lemma 12.3 (c). ■

Der Satz über die Umkehrfunktion ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis. In vielen Situationen dient er beispielsweise dazu, geeignete „Koordinaten“ einzuführen, wobei wir uns die lokal invertierbaren Funktionen als „Koordinatenwechsel“ denken (in Analogie zu den Basistransformationen der linearen Algebra). Der Satz über die Umkehrfunktion ist eine lokale Aussage. Eine globale Variante dieses Satzes erhält man, wenn man von vornherein die Existenz einer (globalen) Umkehrfunktion fordert.

**Folgerung 12.6** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei injektiv, stetig differenzierbar, und  $f'(x)$  sei invertierbar für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist stetig differenzierbar.

Ist sogar  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ , so folgt auch  $f^{-1} \in C^k(f(U), \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis** Sei  $y \in f(U)$  und  $f(x) = y$ . Nach Satz 12.5 gibt es offene Umgebungen  $U_1 \subseteq U$  und  $V_1 \subseteq f(U)$  von  $x$  bzw.  $y$  so, dass  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$  ein Diffeomorphismus ist. Also ist  $f(U)$  offen und  $f^{-1}|_{V_1} = (f|_{U_1})^{-1}$  ist stetig differenzierbar. ■

## 12.3 Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Satz ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz über die Umkehrfunktion. Er gibt uns insbesondere die Möglichkeit, die Lösungsmenge einer Gleichung wie  $f(x, y) = 0$  geeignet zu parametrisieren. Um den Satz über implizite Funktionen besser zu verstehen, betrachten wir zunächst das folgende lineare Problem.

Sei  $A : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lineare Abbildung. Wir schreiben die Elemente von  $\mathbb{R}^{n+k}$  als Paare  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Da  $A$  linear ist, gibt es lineare Abbildungen  $A_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $A_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  so, dass

$$A(x, y) = A_1x + A_2y \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

In dieser Darstellung ist klar, dass sich die Gleichung  $A(x, y) = 0$  genau dann nach  $y$  auflösen lässt, wenn die lineare Abbildung  $A_2$  invertierbar ist, und dass in diesem Fall

$$A(x, y) = 0 \quad \iff \quad y = -A_2^{-1}A_1x.$$

Die Lösungsmenge ist also der Graph einer linearen Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^k$ . Der Satz über implizite Funktionen ist eine Verallgemeinerung dieser Beobachtung auf nichtlineare Abbildungen. Wegen der Nichtlinearität erhält man nur eine lokale Aussage.

**Satz 12.7 (Satz über implizite Funktionen)** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Für  $(x, y) \in U \times V$  spalten wir die Ableitung  $f'(x, y)$  von  $f$  in zwei Teile auf:

$$f'(x, y) = (d_1f(x, y), d_2f(x, y)),$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1f(x, y) &= f'(x, y)|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \\ d_2f(x, y) &= f'(x, y)|_{\{0\} \times \mathbb{R}^k} \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k). \end{aligned}$$

Ist  $(x_0, y_0) \in U \times V$  ein Punkt mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und ist  $d_2f(x_0, y_0)$  invertierbar, so existieren offene Umgebungen  $U_1 \subseteq U$  von  $x_0$  und  $V_1 \subseteq V$  von  $y_0$  sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $\eta : U_1 \rightarrow V_1$  mit  $\eta(x_0) = y_0$  und

$$\{(x, y) \in U_1 \times V_1 : f(x, y) = 0\} = \{(x, \eta(x)) : x \in U_1\}. \quad (12.11)$$

Insbesondere ist  $f(x, \eta(x)) = 0$  für alle  $x \in U_1$ . Ist auch noch  $d_2f(x, \eta(x))$  invertierbar, so folgt

$$\eta'(x) = -(d_2f(x, \eta(x)))^{-1} d_1f(x, \eta(x)). \quad (12.12)$$

Speziell ist für  $n = k = 1$

$$\eta'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x))}.$$

Die Funktion  $\eta$  wird also implizit durch die Gleichung  $f(x, \eta(x)) = 0$  definiert. Wir können diese Funktion auffassen als lokale Parametrisierung der Lösungsmenge der Gleichung  $f(x, y) = 0$ , da diese durch (12.11) lokal als Graph der Funktion  $\eta$  dargestellt wird. Ist  $f \in C^m$ , so kann man wieder  $\eta \in C^m$  zeigen.

**Beweis** Wir identifizieren lineare Abbildungen mit ihren Matrixdarstellungen bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^m$ . In diesem Sinn hat die Abbildung

$$\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

die Ableitung (= Jacobimatrix)

$$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y)\right)_{i,j=1}^{k,n} & & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_\ell}(x, y)\right)_{i,\ell=1}^{k,k} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ d_1f(x, y) & d_2f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Invertierbarkeit von  $d_2f(x_0, y_0)$  folgt daher die von  $\varphi'(x_0, y_0)$ . Da  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, existiert nach dem Satz über die Umkehrfunktion eine Umgebung  $W \subseteq U \times V$  von  $(x_0, y_0)$  so, dass  $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  ein Diffeomorphismus ist. Die Umkehrfunktion  $\psi := (\varphi|_W)^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$  hat dann die Gestalt

$$\psi(x, y) = (x, g(x, y)) \quad \text{mit } g : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Wir definieren

$$\eta : \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \varphi(W)\} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x \mapsto g(x, 0).$$

Dann ist  $\psi(x, 0) = (x, g(x, 0)) = (x, \eta(x))$  und daher

$$(x, 0) = \varphi(\psi(x, 0)) = \varphi(x, \eta(x)) = (x, f(x, \eta(x))),$$

also  $f(x, \eta(x)) = 0$ . Ist umgekehrt  $f(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in W$ , so ist  $\varphi(x, y) = (x, 0)$  und daher  $(x, y) = \psi(x, 0) = (x, g(x, 0)) = (x, \eta(x))$ , also  $y = \eta(x)$ . Dann ist klar, dass

$$\{(x, y) \in W : f(x, y) = 0\} = \{(x, \eta(x)) \in W : (x, 0) \in \varphi(W)\}. \quad (12.13)$$

Wir wählen nun offene Umgebungen  $U'_1$  von  $x_0$  und  $V_1$  von  $y_0$  so klein, dass  $U'_1 \times V_1 \subseteq W$  und dann eine Umgebung  $U_1$  von  $x_0$  mit  $\eta(U_1) \subseteq V_1$  (diese lässt sich finden, da  $\eta$  stetig ist). Dann folgt (12.11) aus (12.13), und  $\eta$  ist stetig differenzierbar nach dem Satz über die Umkehrfunktion.

Wir zeigen noch (12.12). Aus  $f(x, \eta(x)) = 0$  für alle  $x \in U_1$  und

$$f'(x, y) = (d_1f(x, y), d_2f(x, y))$$

folgt mit der Kettenregel (wir leiten  $f(x, \eta(x)) = 0$  nach  $x$  ab):

$$0 = f'(x, \eta(x)) \circ (id, \eta'(x)) = d_1f(x, \eta(x)) + d_2(f(x, \eta(x))) \circ \eta'(x).$$

Ist  $d_2(f(x, \eta(x)))$  invertierbar, folgt hieraus (12.12). ■

**Beispiel 1** Wir betrachten den Einheitskreis, d.h. die Nullstellenmenge von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

Die lokale Auflösbarkeitsbedingung nach  $y$  lautet

$$0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0.$$

Für  $y_0 \neq 0$  existieren also Funktionen  $\eta$  so, dass der Einheitskreis lokal als Graph von  $\eta$  darstellbar ist. Für  $y_0 > 0$  ist  $\eta(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , und für  $y_0 < 0$  haben wir

$\eta(x) = -\sqrt{1-x^2}$ . Für  $y_0 = 0$  ist der Einheitskreis nicht lokal als Graph einer Funktion von  $x$  darstellbar. Dafür kann man um die Punkte  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  den Einheitskreis lokal als Graph einer Funktion von  $y$  darstellen. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$$

ist in diesen Punkten nämlich die lokale Auflösbarkeitsbedingung nach  $x$  erfüllt. (Beachten Sie: es spielt keine Rolle, wie man den  $\mathbb{R}^{n+k}$  in zwei Unterräume  $E_1$  und  $E_2$  aufteilt. Wichtig ist nur, dass  $d_2 f(x_0, y_0) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  invertierbar ist.) Entsprechend erhalten wir Funktionen  $\eta(y) = \sqrt{1-y^2}$  für  $x_0 > 0$  und  $\eta(y) = -\sqrt{1-y^2}$  für  $x < x_0$ . ■

**Beispiel 2** Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x^2 - z^2 \end{pmatrix}$$

hat die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix}.$$

Die Auflösbarkeitsbedingung nach  $(y, z)$  ist erfüllt, wenn

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0)\right) = \det\begin{pmatrix} -2y_0 & 0 \\ 0 & -2z_0 \end{pmatrix} = 4y_0 z_0 \neq 0.$$

Ist dagegen

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial(x, z)}(x_0, y_0, z_0)\right) = \det\begin{pmatrix} 2x_0 & 0 \\ 2x_0 & -2z_0 \end{pmatrix} = -4x_0 z_0 \neq 0,$$

so erhalten wir die lokale Auflösbarkeit nach dem Variablenpaar  $(x, z)$ . Hier steht  $\frac{\partial f}{\partial(y, z)}$  für die Jacobimatrix von  $f$ , betrachtet als Funktion von  $y$  und  $z$ . ■

**Beispiel 3** Sei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$f(x, t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

Dann ist  $f(x, t) = 0$  genau dann, wenn  $t$  eine Nullstelle des Polynoms  $P_x(t) := f(x, t)$  ist. Sei  $t_0$  eine einfache Nullstelle von  $P_{x_0}$ , d.h. sei  $P_{x_0}(t_0) = 0$  und  $P'_{x_0}(t_0) \neq 0$ . Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) = P'_{x_0}(t_0) \neq 0.$$

Also ist  $f(x, t)$  lokal nach  $t$  auflösbar. ■

Wir haben in Beispiel 3 die folgende bemerkenswerte Aussage bewiesen:

*Die einfachen Nullstellen eines Polynoms hängen lokal beliebig oft differenzierbar von den Koeffizienten des Polynoms ab.*

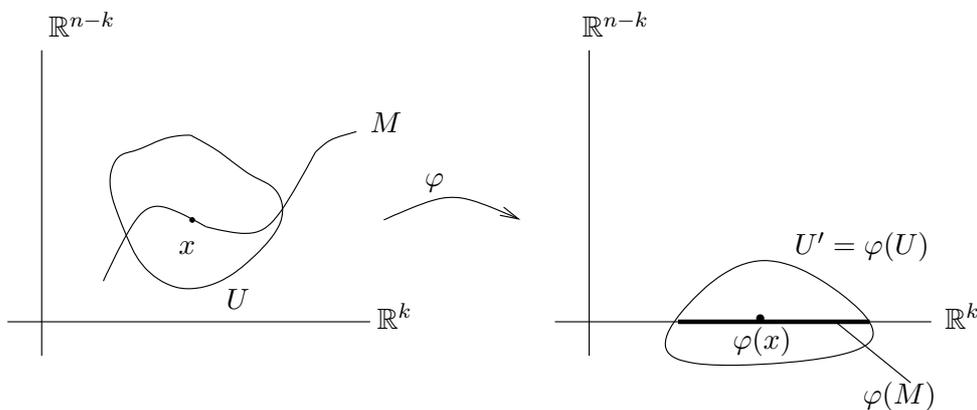
## 12.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Wir haben im vorigen Abschnitt Lösungsmengen von Gleichungen lokal als Funktionsgraphen dargestellt. Der folgende Begriff beschreibt allgemein Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , die sich so darstellen lassen (unabhängig davon, ob sie Lösungsmenge einer Gleichung sind).

**Definition 12.8** Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *k-dimensionale  $C^m$ -Untermannigfaltigkeit*, wenn gilt: Für jedes  $x \in M$  gibt es offene Mengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $U' \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und einen  $C^m$ -Diffeomorphismus

$$\varphi : U \rightarrow U' \quad \text{mit} \quad \varphi(U \cap M) = U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Eine solche Abbildung heißt *Umgebungskarte*. Eine Familie  $(\varphi_j)_{j \in J}$  von Umgebungskarten  $\varphi_j : U_j \rightarrow U'_j$  von  $M$  heißt *Umgebungsatlas* von  $M$ , wenn  $M \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ .



Eine Mannigfaltigkeit ist also eine Menge, die in geeigneten krummlinigen Koordinaten (beschrieben durch  $\varphi$ ) lokal wie  $\mathbb{R}^k$  in  $\mathbb{R}^n$  aussieht.

**Beispiel 1** (Funktionsgraphen) Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Wir zeigen, dass der Graph von  $f$ , d.h. die Menge

$$M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+n} : x \in V\}$$

eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{k+n}$  ist. Dazu sei  $U := V \times \mathbb{R}^n$ . Diese Menge ist offen und enthält  $M$  (ist also eine offene Umgebung jedes Punktes von  $M$ ). Die Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow U, \quad (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$$

ist ein Diffeomorphismus von  $U$  mit der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U \rightarrow U, \quad (x, y) \mapsto (x, y + f(x)).$$

Weiter ist

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(M) = V \times \{0\} = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Die Abbildung  $\varphi$  liefert also einen einelementigen Umgebungsatlas von  $M$ . ■

**Beispiel 2** Wir zeigen, dass die  $n$ -Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2 = 1\}$$

eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Dazu betrachten wir für jedes  $j = 1, \dots, n+1$  die Mengen

$$U_j^\pm := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i \neq j} x_i^2 < 1, \pm x_j > 0\}.$$

Jede dieser Mengen ist offen, und diese Mengen überdecken  $\mathbb{S}^n$ . Weiter: die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_j^\pm : U_j^\pm &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \\ &\mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}, x_j \mp (1 - \sum_{i \neq j} x_i^2)^{1/2}) \end{aligned}$$

sind Diffeomorphismen von  $U_j^\pm$  auf  $\varphi_j^\pm(U_j^\pm)$  (warum?), und es gilt

$$\varphi_j^\pm(U_j^\pm \cap \mathbb{S}^n) = \varphi_j^\pm(U_j^\pm) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Die  $2(n+1)$  Umgebungskarten  $\varphi_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , bilden also einen Umgebungsatlas von  $\mathbb{S}^n$ . ■

**Beispiel 3** Sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $\ker A$  eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension  $\dim \ker A = n - \text{rang } A$  im Sinne der linearen Algebra. Der Kern von  $A$  ist auch eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - \text{rang } A$  im Sinne von Definition 12.8. Dazu schreiben wir  $\mathbb{R}^n$  als direkte Summe  $\ker A \dot{+} N$ , wählen lineare Isomorphismen

$$J_1 : \ker A \rightarrow \mathbb{R}^{n-\text{rang } A}, J_2 : N \rightarrow \mathbb{R}^{\text{rang } A}$$

und definieren

$$\varphi : \mathbb{R}^n = \ker A \dot{+} N \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-\text{rang } A} \times \mathbb{R}^{\text{rang } A}, x \dot{+} y \mapsto (J_1 x, J_2 y). \quad \blacksquare$$

Den folgenden Satz kann man als eine globale Version des Satzes über implizite Funktionen auffassen. Er gibt nicht nur Auskunft über die *lokale* Struktur der Lösungsmenge einer Gleichung, sondern über deren *globale* Struktur.

**Definition 12.9** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine differenzierbare Funktion. Wir nennen  $x \in U$  einen kritischen Punkt und  $f(x) \in \mathbb{R}^k$  einen kritischen Wert, wenn

$$\text{rang}(f'(x)) < k.$$

Ein Punkt  $y \in \mathbb{R}^k$  heißt regulärer Wert, wenn sein volles Urbild  $f^{-1}(y)$  keine kritischen Punkte enthält.

**Satz 12.10 (Rangsatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^m$ -Abbildung. Ist  $w \in f(U)$  ein regulärer Wert, so ist das volle Urbild  $f^{-1}(w)$  eine  $n-k$ -dimensionale  $C^m$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

Im Spezialfall  $n = 2, k = 1$  heißen die Mengen  $f^{-1}(w)$  Höhenlinien von  $f$ . Allgemeiner spricht man für  $n \geq 2$  von Niveauflächen.

**Beweis** Wir können davon ausgehen, dass  $w = 0$  ist (andernfalls wenden wir die folgenden Überlegungen auf die Funktion  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k, x \mapsto f(x) - w$  an). Sei also  $u \in U$  ein Punkt mit  $f(u) = 0$ . Nach Voraussetzung ist

$$\text{rang } f'(u) = \text{rang} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{k,n} = k.$$

O.B.d.A. können wir weiter annehmen, dass die ersten  $k$  Spalten der Matrix  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  linear unabhängig sind (andernfalls nummerieren wir die Koordinaten  $x_j$  um). Sei nun

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Dann ist

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,j=1}^{k,k} & \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,j=k+1}^{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es eine offene Umgebung  $W \subseteq U$  von  $u$  so, dass  $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$  ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$\varphi(f^{-1}(0) \cap W) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \varphi(W).$$

Also ist  $\varphi$  eine Umgebungskarte von  $f^{-1}(0)$  um  $u$ . Da  $u \in f^{-1}(0)$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

**Beispiel 4** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4$ . Dann ist  $f'(x, y) = (4x^3, -4y^3)$ . Folglich ist  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  der einzige kritische Punkt und  $w = 0 \in \mathbb{R}$  der einzige kritische Wert von  $f$ . Für  $w \neq 0$  sind also alle Höhenlinien von  $f$  glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^2$ . Für  $w = 0$  ist die zugehörige Höhenlinie

keine Untermannigfaltigkeit (sie besteht aus zwei Geraden, die sich in der Null schneiden). ■

**Beispiel 5** Sei  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  symmetrisch und invertierbar und

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x \rangle.$$

Aus

$$\langle A(x+h), x+h \rangle - \langle Ax, x \rangle = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle$$

folgt sofort

$$f'(x)h = 2\langle Ax, h \rangle = 2x^T Ah,$$

also  $f'(x) = 2x^T A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Da  $A$  invertierbar ist, ist  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann kritisch, wenn  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ , und  $w = 0 \in \mathbb{R}$  ist der einzige kritische Wert von  $f$ . Ist beispielsweise  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_i > 0$ , und ist  $t > 0$ , so erhalten wir, dass die Ellipsoide

$$f^{-1}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = t \right\}$$

glatte  $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  sind. Insbesondere ist  $\mathbb{S}^{n-1}$  eine  $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  (vgl. Beispiel 2).

## 12.5 Extrema unter Nebenbedingungen

In Kapitel 10 haben wir Extrema von Funktionen studiert, die auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definiert sind. Wir betrachten nun eine Situation, die in praktischen Problemen viel häufiger ist: wir suchen Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen, d.h. Extrema von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ . Wir wollen dabei *vermeiden*, durch eine geeignete Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit das Problem auf die in Kapitel 10 betrachtete Situation zurückführen, da dies in der Regel recht schwierig ist.

Wir präzisieren zunächst die Problemstellung. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  eine offene Menge, und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar. Weiter sei  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion, für die  $0 \in \mathbb{R}^n$  ein regulärer Wert ist. Dann ist

$$M := \{x \in U : g(x) = 0\}$$

eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Wir sagen, dass  $u \in U$  ein *lokales Minimum (Maximum) von  $f$  unter der Nebenbedingung  $M$  oder  $g = 0$  ist*, wenn  $u \in M$  und wenn es eine Umgebung  $V$  von  $u$  so gibt, dass  $f(x) \geq f(u)$  (bzw.  $f(x) \leq f(u)$ ) für alle  $x \in V \cap M$ .

**Satz 12.11** *Unter den soeben getroffenen Voraussetzungen gilt: Ist  $u \in U$  ein lokales Extremum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$ , so gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  so, dass*

$$f'(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g'_i(u). \quad (12.14)$$

Diese Zahlen  $\lambda_i$  heißen auch *Lagrange-Multiplikatoren*.

**Beweis** Nach Satz 12.10 ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Wir finden also eine Umgebung  $W \subseteq U$  von  $u$  und einen Diffeomorphismus  $\varphi : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  mit

$$\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Wir schreiben  $\varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$  als

$$\{(y, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y \in V\}$$

mit einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  und definieren

$$\psi : V \rightarrow U, \quad y \mapsto \varphi^{-1}(y, 0). \quad (12.15)$$

Offenbar ist  $\psi$  eine Bijektion von  $V$  auf  $W \cap M$ . Die Abbildung  $\psi$  ist auch stetig differenzierbar. Mit der linearen Abbildung

$$E : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (y, 0)$$

können wir nämlich  $\psi$  auffassen als Einschränkung von  $\varphi^{-1} \circ E$  auf  $V$ . Die Einschränkung  $E|_V$  ist aber differenzierbar, und ihre Ableitung ist in jedem Punkt gleich  $E$ . Aus  $\varphi \circ \psi = E|_V$  folgt außerdem mit der Kettenregel  $\varphi'(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = E$ . Für  $v := \varphi(u)$  ist also insbesondere  $\text{rang } \psi'(v) = \text{rang } E = m$ .

Nach diesen Vorüberlegungen nun zum eigentlichen Beweis. Die Funktion  $f \circ \psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $v$  ein lokales Extremum (ohne Nebenbedingungen!). Es ist also

$$(f \circ \psi)'(v) = f'(\psi(v)) \circ \psi'(v) = f'(u) \circ \psi'(v) = 0. \quad (12.16)$$

Außerdem gilt für jedes  $i = 1, \dots, n$ , dass  $g_i(\psi(y)) = 0$  für  $y \in V$ . Differenzieren liefert  $g'_i(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = 0$  und insbesondere

$$g'_i(u) \circ \psi'(v) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (12.17)$$

Damit ist klar, dass  $\text{im } \psi'(v) \subseteq \ker g'(u)$ . Nun ist aber

$$\dim \ker g'(u) + \text{rang } g'(u) = \dim \ker g'(u) + n = m + n,$$

also  $\dim \ker g'(u) = m$ . Hieraus folgt wegen  $\text{rang } \psi'(v) = m$  sogar

$$\text{im } \psi'(v) = \ker g'(u).$$

Ist nun  $w \in \text{im } \psi'(v)$ , so folgt aus (12.16) und (12.17), dass

$$f'(u)w - \lambda_1 g'_1(u)w - \dots - \lambda_n g'_n(u)w = 0 \quad (12.18)$$

für beliebige  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir noch die Vektoren aus dem orthogonalen Komplement  $W$  von  $\text{im } \psi'(v)$  betrachten. Sei  $w_1, \dots, w_n$  eine Basis von  $W$ . Wir bestimmen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} f'(u)w_1 & - & \lambda_1 g'_1(u)w_1 - \dots - \lambda_n g'_n(u)w_1 = 0 \\ & \vdots & \\ f'(u)w_n & - & \lambda_1 g'_1(u)w_n - \dots - \lambda_n g'_n(u)w_n = 0. \end{array}$$

Dazu müssen wir uns lediglich klarmachen, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} g'_1(u)w_1 & \dots & g'_n(u)w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ g'_1(u)w_n & \dots & g'_n(u)w_n \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Wäre sie das nicht, so wären ihre Zeilen linear abhängig. Es gäbe also Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , die nicht alle gleich Null sind, so dass

$$\mu_1 (g'_1(u)w_1, \dots, g'_n(u)w_1) + \dots + \mu_n (g'_1(u)w_n, \dots, g'_n(u)w_n) = 0$$

bzw.

$$g'_1(u)w = \dots = g'_n(u)w = 0$$

mit  $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$ . Der Vektor  $w$  liegt also im Kern von  $g'(u)$ . Da  $w \in W$ , und da  $W$  senkrecht zu diesem Kern steht, folgt  $w = 0$ . Da aber die  $w_i$  linear unabhängig sind, folgt  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ , ein Widerspruch.

Wir können also die  $\lambda_i$  aus dem Gleichungssystem eindeutig bestimmen. Da die  $w_i$  den Raum  $W$  aufspannen, folgt

$$f'(u)w - \lambda_1 g'_1(u)w - \dots - \lambda_n g'_n(u)w = 0$$

für alle  $w \in W$  und folglich für alle  $w \in \mathbb{R}^{m+n}$ . ■

Zur praktischen Bestimmung lokaler Extrema unter Nebenbedingungen muss man also das System

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(x) + \dots + \lambda_n \frac{\partial g_n}{\partial x_k}(x) \quad , \quad k = 1, \dots, m+n \\ g_\ell(x) = 0 \quad , \quad \ell = 1, \dots, n \end{array} \quad (12.19)$$

bestehend aus  $m+2n$  Gleichungen für die  $m+2n$  Unbekannten  $x = (x_1, \dots, x_{n+m})$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lösen und die erhaltenen extremwertverdächtigen Punkte auf ihre Extremaleigenschaften untersuchen. Es ist hilfreich, sich die Funktion

$$G(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_n g_n(x)$$

zu merken. Sucht man nämlich die extremwertverdächtigen Punkte von  $G$  durch partielles Ableiten nach jeder der Variablen  $x_i, \lambda_j$  und anschließendes Nullsetzen, so gelangt man gerade zum System (12.19).

**Beispiel 1** Gesucht sind Maximum und Minimum der Funktion  $f(x, y) = xy$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ , d.h. auf der Einheitskreislinie. Die Matrix

$$g'(x, y) = (2x, 2y)$$

hat offenbar in jedem Punkt der Einheitskreislinie den Rang 1, so dass Satz 12.11 anwendbar ist. Wir betrachten die Funktion

$$G(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und setzen ihre partiellen Ableitungen Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 &\quad \Rightarrow \quad y - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $y$  und die zweite mit  $x$  und finden  $x^2 = y^2$ , woraus zusammen mit der dritten Gleichung für  $(x, y)$  die Paare

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

in Frage kommen. Diese lösen tatsächlich das System (die ersten beiden Paare mit  $\lambda = 1/2$ , die anderen mit  $\lambda = -1/2$ ). Als Funktionswert ergibt sich für die ersten beiden Paare  $1/2$ , für die anderen  $-1/2$ . Da die Funktion  $f$  Maximum und Minimum auf der Einheitskreislinie besitzen *muss*, ist  $1/2$  das Maximum und  $-1/2$  das Minimum von  $f$ . ■

**Beispiel 2** Sei  $A$  eine symmetrische  $k \times k$  Matrix. Wir suchen die extremwertverdächtigen Punkte von  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$  auf der Sphäre  $\mathbb{S}^{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$ , d.h. unter der Nebenbedingung  $g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$ . Hier ist  $n = 1$  und  $m = k - 1$ , also  $m + 2n = k + 1$ .

Die Ableitung von  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$  ist  $f'(x) = 2x^T A$  (vgl. Beispiel 5 in 12.4) und die von  $g(x) = \|x\|^2 - 1 = \langle x, x \rangle - 1$  ist  $g'(x) = 2x^T$ . Damit ist klar, dass die Rangbedingung erfüllt ist. Das zu lösende Gleichungssystem ist also

$$\begin{aligned} f'(x) - \lambda g'(x) &= 2x^T A - 2\lambda x^T = 0, \\ g(x) &= \|x\|^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

bzw. nach Transponieren

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|^2 = 1.$$

Ein Punkt  $x \in \mathbb{S}^{k-1}$  ist also genau dann extremwertverdächtig, wenn er Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  ist. Wegen  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$  ergibt sich für die zugehörigen Funktionswerte

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda.$$

Folglich wird  $f$  in  $x$  genau dann minimal (maximal), wenn  $x$  ein Eigenvektor zum kleinsten (größten) Eigenwert von  $A$  ist. Man beachte: die stetige Funktion  $f$  nimmt auf der kompakten Menge  $\mathbb{S}^{k-1}$  ihr Maximum an, woraus folgt, dass  $A$  mindestens einen reellen Eigenwert besitzen muss. Es ist also

$$\begin{aligned} \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{größter Eigenwert von } A, \\ \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{kleinster Eigenwert von } A. \quad \blacksquare \end{aligned}$$