Vorlesung Analysis I und II

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen **1**
- 1.1 Die Körperaxiome . . . 2
  - 1.1.1 Die Axiome der Addition . . . 2
  - 1.1.2 Die Axiome der Multiplikation . . . 3
- 1.2 Die Anordnungsaxiome . . . 4
  - 1.2.1 Das Rechnen mit Ungleichungen . . . 5
  - 1.2.2 Der Betrag einer reellen Zahl . . . 5
- 1.3 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 6
  - 1.3.1 Das babylonische Wurzelziehen . . . 7
  - 1.3.2 Minimum und Maximum, Infinum und Supremum . . . 8
  - 1.3.3 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 9
  - 1.3.4 Die natürlichen Zahlen . . . 10
  - 1.3.5 Die Archimedische Anordnung der reellen Zahlen . . . 13
- 1.4 Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche . . . 13

2 Mengen und Abbildungen **15**
- 2.1 Mengen und Mengenoperationen . . . 15
  - 2.1.1 Operationen mit Mengen . . . 15
- 2.2 Abbildungen . . . 17
  - 2.2.1 Definitionen . . . 17
  - 2.2.2 Die Umkehrabbildung . . . 19
  - 2.2.3 Verknüpfung von Abbildungen . . . 20
- 2.3 Mächtigkeit von Mengen . . . 21

3 Metrische Räume **26**
- 3.1 Der Euklidsche Raum $\mathbb{R}^n$ . . . 26
  - 3.1.1 Der Abstand in $\mathbb{R}$ . . . 26
  - 3.1.2 Der Raum $\mathbb{R}^n$ . . . 27
- 3.2 Der Körper der komplexen Zahlen . . . 30
- 3.3 Metrische Räume . . . 32
- 3.4 Folgen in metrischen Räumen . . . 37
- 3.5 Vollständige metrische Räume . . . 40

4 Zahlenfolgen **44**
- 4.1 Rechnen mit Grenzwerten . . . 44
- 4.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ . . . 46
- 4.3 Einige spezielle Grenzwerte . . . 50
- 4.4 Partielle Grenzwerte . . . 53
- 4.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}$ . . . 54

5 Zahlenreihen **57**
5.1 Konvergenz von Reihen 57
5.2 Absolut konvergente Reihen 61
5.3 Umordnung von Reihen 65
5.4 Produkte von Reihen 68

6 Stetige Funktionen **71**
6.1 Stetige Funktionen 71
6.2 Stetige Funktionen auf oder nach $\mathbb{R}^n$ 74
6.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$ 80
6.4 Einige spezielle Funktionen 83
6.4.1 Die Exponentialfunktion 83
6.4.2 Die trigonometrischen Funktionen 85
6.5 Der Zwischenwertsatz 87
6.6 Monotonie und Umkehrfunktion 90
6.6.1 Die reelle Logarithmusfunktion 91
6.6.2 Zyklometrische oder Arkusfunktionen 93
6.6.3 Areafunktionen 94
6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen 94
6.7.1 Kompakte Mengen 94
6.7.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen 97
6.8 Stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen 99

7 Differentialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen **103**
7.1 Definition der Ableitung und einfache Eigenschaften 104
7.2 Rechnen mit Ableitungen 105
7.3 Ableitungen spezieller Funktionen 108
7.3.1 Polynome und rationale Funktionen 108
7.3.2 Exponential–, Logarithmus– und Potenzfunktion 109
7.3.3 Trigonometrische Funktionen 110
7.4 Die Mittelwertsätze und der Satz von Taylor 111
7.4.1 Der Satz von Rolle 111
7.4.2 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung 112
7.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen 114
7.4.4 Der Satz von Taylor 116
7.4.5 Taylorreihen und Potenzreihen 118
7.5 Einige Anwendungen der Differentialrechnung 120
7.5.1 Kurvendiskussion 120
7.5.2 Bestimmung von Grenzwerten 122
7.6 Differentiation vektorwertiger Funktionen 123

8 Das Riemann–Integral **125**
8.1 Der Begriff des Riemann–Integrals 125
8.2 Darbouxsche Integrale 127
8.3 Einige Klassen Riemann–integrierbarer Funktionen 131
8.4 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium 132
8.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals 136
8.6 Integralungleichungen und Mittelwertsätze 137
8.7 Die Hauptsätze der Differential– und Integralrechnung 139
8.7.1 Stammfunktionen 139
8.7.2 Der (erste) Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung 140
8.7.3 Der zweite Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung 141
8.8 Integrationstechniken 141
8.8.1 Linearität 142
8.8.2 Partielle Integration 142
8.8.3 Integration durch Substitution 143
8.9 Stammfunktionen rationaler Funktionen 145
8.10 Uneigentliche Integrale 148
8.10.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall 148
8.10.2 Integrale mit offenem Integrationsintervall 151
8.11 Flächeninhalte 152

9 Folgen und Reihen von Funktionen **155**
9.1 Punktweise Konvergenz 155
9.2 Gleichmäßige Konvergenz 157
9.3 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit 160
9.4 Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit/ Differenzierbarkeit 161
9.5 Ergänzungen zu Potenzreihen 164
9.6 Fourierreihen 170
9.6.1 Periodische Funktionen 170
9.6.2 Trigonometrische Reihen 171
9.6.3 Fourierreihen 172
9.6.4 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen 173
9.6.5 Konvergenz im quadratischen Mittel 175

10 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher **180**
10.1 Lineare Abbildungen und Stetigkeit 180
10.2 Partielle Ableitungen 184
10.3 Differenzierbarkeit 188
10.4 Richtungsableitungen 194
10.5 Der Mittelwertsatz 195
10.6 Der Satz von Taylor 196
10.7 Lokale Extrema 200
10.8 Parameterabhängige Integrale 202

11 Kurvenintegrale **209**
11.1 Wege und Kurven 209
11.2 Rektifizierbare Wege und Bogenlänge 210
11.3 Wegintegrale 214
11.4 Ergänzungen zum Begriff „Zusammenhang“ 219
11.5 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen . 221

12 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten **226**
12.1 Der Banachsche Fixpunktsatz 226
12.2 Der Satz über die Umkehrfunktion 228
12.3 Der Satz über implizite Funktionen 233
12.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ 237
12.5 Extrema unter Nebenbedingungen 240

13 Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher **245**
13.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im $\mathbb{R}^n$ 245
13.2 Integrabilitätskriterien 247
13.2.1 Charakterisierung über Darbouxsche Integrale 247
13.2.2 Charakterisierung über Nullmengen 248
13.3 Der Satz von Fubini 249
13.4 Integration über Jordan-messbaren Mengen 251
13.5 Inhalt von Ordinatenmengen 259
13.6 Integration über Normalbereiche 260
13.7 Die Substitutionsregel 263

14 Oberflächenintegrale und Integralsätze **272**
14.1 Flächen, Tangenten und Normalen 272
14.2 Flächenintegrale 276
14.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes 281
14.4 Der Gaußsche Integralsatz im Raum 282
14.5 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene 287
14.6 Der Stokessche Integralsatz 290
14.7 Einige weitere Differential- und Integralformeln 296
14.7.1 Der Nabla-Operator 296
14.7.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren 296
14.7.3 Produktregeln 297
14.7.4 Die Greenschen Formeln 297