# Einführung in die Optimierung
# 9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Alexander Martin**
Dipl. Math. Andrea Peter

**WS 2009/2010**
**17./18.12.2009**

## Gruppenübung

**Aufgabe G20** (Reoptimierung)
Eine Möbelfirma stellt Regale, Tische, Stühle und Betten her. Zur Herstellung eines Produktes sind 3, 2, 1 bzw. 2 Arbeitsstunden, 4, 3, 3 bzw. 4 Einheiten Holz und jeweils eine Einheit Metall erforderlich. Es stehen 225 Arbeitsstunden, 117 Einheiten Metall und 420 Einheiten Holz zur Verfügung. Der Gewinn des Herstellers beträgt 19 Euro pro Regal, 13 Euro pro Tisch, 12 Euro pro Stuhl und 17 Euro pro Bett. Zur Bestimmung eines optimalen Produktionsplans hat die OR-Abteilung folgendes LP aufgestellt:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max & 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

und mittels des Simplex-Verfahrens gelöst. Die Optimallösung ist $\bar{x} = (39, 0, 48, 30)^T$ mit Zielfunktionswert 1827. Die optimale Basis ist $B = (1, 3, 4)$ und die Nichtbasis entsprechend $N = (2, 5, 6, 7)$. Die Inverse der Basismatrix lautet:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Reoptimiere den Produktionsplan $x = (39, 0, 48, 30)^T$ der Möbelfirma mit den Methoden der Sensitivitätsanalyse (*sensitivity analysis*), falls jeweils eine der folgenden Änderungen berücksichtigt werden soll:

(a) Es sollen höchstens doppelt so viele Regale wie Tische hergestellt werden.

(b) Der Gewinn pro Stuhl steigt von 12 auf 14 Euro.

(c) Der zur Verfügung stehende Vorrat an Holz verringert sich von 420 auf 400 Einheiten.

(d) Es werden zusätzlich noch Schränke hergestellt, die mit einem Gewinn von 15 Euro verkauft werden können. Zur Herstellung eines Schrankes werden 1 Arbeitsstunde, 2 Einheiten Metall und 2 Einheiten Holz benötigt.

(e) Durch die Anschaffung neuer Maschinen verringert sich die zur Herstellung eines Tisches nötige Arbeitszeit auf 1 Stunde.

**Aufgabe G21** (Kodierungslänge (*encoding length*))

(a) Berechne die Kodierungslänge von

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 42 \\ 0.125 & \frac{17}{51} \end{pmatrix}.$$

(b) Zeige:

i. Für jedes $r \in \mathbf{Q}$ gilt: $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.

ii. Für je zwei rationale Zahlen $r, s \in \mathbf{Q}$ gilt: $\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle$.

**Aufgabe G22** (Laufzeit (*running time*))
Betrachte Algorithmus 1, der die Urversion des Euklidischen Algorithmus' zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (*greatest common divisor*) zweier Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche (*comparisons*), Zuweisungen (*assignments*) und Subtraktionen als elementare Rechenschritte angesehen werden.

**Algorithm 1** Urversion des Euklidischen Algorithmus'

**while** $b \neq 0$ **do**
  **if** $a > b$ **then**
    $a \leftarrow a - b$
  **else**
    $b \leftarrow b - a$
  **end if**
**end while**

## Hausübung

**Aufgabe H27** (Wiederholung)
Die erste Vorlesung im neuen Jahr wird eine Wiederholungsvorlesung sein, die ihr aktiv mitgestalten dürft!
Wiederholt den bisherigen Vorlesungsstoff und überlegt euch Fragen, die ihr dann in der Wiederholungsstunde gerne beantwortet hättet. Überlegt euch auch, welchen Stoff ihr besonders leicht und welchen ihr besonders schwierig fandet, was ihr interessant fandet und wo es überraschende Ergebnisse gab. In der Vorlesung werden dann Zettel ausgeteilt, auf denen ihr eure Fragen anonym stellen könnt, sodass ihr euch trauen könnt, jede noch so „doofe“ Frage zu stellen.
Nehmt diese Aufgabe bitte ernst, auch wenn es keine Punkte darauf gibt. Hier könnt ihr die Lehrveranstaltung selbst beeinflussen und euren Wissenszuwachs maximieren!

**Aufgabe H28** (Phase I mit oberen Schranken) (5 Punkte)
Wie kann die in der Vorlesung vorgestellte Phase I des Simplex-Alogrithmus' modifiziert werden damit sie eine zulässige Basislösung für den Simplex-Algorithmus mit oberen Schranke liefert?

**Aufgabe H29** (Klee-Minty-Würfel) (6 Punkte)
Betrachte das von Klee und Minty eingeführte LP:

$$\begin{array}{rll} \min & -\sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} x_i & \\ s.t. & x_1 & \leq 1, \\ & 2 \cdot \sum_{i=1}^{j-1} 10^{j-i} x_i + x_j & \leq 100^{j-1}, \quad (2 \leq j \leq n) \\ & x \geq 0. & \end{array}$$

(a) Zeichne den Zulässigkeitsbereich (*feasible region*) für $n = 2$ und berechne die Optimallösung mit dem Simplexverfahren mit der Auswahlregel (*selection rule*) von Bland, wobei Du im Ursprung (*origin*) startest.
*Hinweis:* Du kannst zur Lösung auch Dein Matlab-Programm (mit Regel von Bland!) benutzen. Es müssen jedoch Zwischenergebnisse angegeben werden, d.h. mindestens die Lösung, die Basis und der Zielfunktionswert nach jeder Iteration.

(b) Ändere die Zielfunktion so, dass unabhängig von der Auswahlregel direkt nach einem Simplexschritt das Optimum erreicht wird.

**Aufgabe H30** (Laufzeit) (5 Punkte)
Betrachte Algorithmus 2, der eine moderne Version des Euklidischen Algorithmus' zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche, Zuweisungen und modulo-Rechnung als elementare Rechenschritte angesehen werden.

**Algorithm 2** Moderne Version des Euklidischen Algorithmus'

**while** $b \neq 0$ **do**
  $h \leftarrow a \bmod b$
  $a \leftarrow b$
  $b \leftarrow h$
**end while**

# Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in ein optimales Jahr 2010!