Einführung in die Optimierung
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
10./11.12.2009

Rechnerübung

Implementiere zuerst den Simplex-Algorithmus vom 7. Übungsblatt fertig.

Aufgabe R4 (PhaseI)
Implementiere die Phase I aus der Vorlesung (Algorithmus 5.15). Definiere dazu die Funktion

```
[B, message] = phaseI(A, b).
```

Die Variablen sollen die folgende Bedeutung haben:

- Der Vektor `B` repräsentiert eine zulässige Basis, falls eine solche existiert.
- Die Zeichenkette `message` soll die Mitteilung „Das LP besitzt eine zulässige Basis.“, „Das LP ist unzulässig.“ oder „rang(A) < m“ beinhalten.
- Die Matrix `A` und der Vektor `b` entsprechen denen aus der Standardform (siehe (5.1)). Dabei soll $b \geq 0$ gelten.

Teste deine Implementierung mit den folgenden Daten:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe R5 (LP-Löser)
Implementiere einen LP-Löser mit Hilfe der Funktionen `simplex` und `phaseI`. Definiere dazu die Funktion

```
[xOpt, message, BOpt] = lpSolve(A, b, c).
```

Die Variablen sollen die folgende Bedeutung haben:

- Der Vektor `xOpt` ist eine Optimallösung, falls eine solche existiert.
- Die Zeichenkette `message` soll die Mitteilung „Das LP besitzt eine Optimallösung.“, „Das LP ist unbeschränkt.“, „rang(A) < m“ oder „Das LP ist unzulässig“ beinhalten.
- Der Vektor `BOpt` soll die Basis der Optimallösung enthalten – falls eine Lösung existiert.
- Die Matrix `A` und die Vektoren `b` und `c` entsprechen denen aus der Standardform (siehe (5.1)). Dabei soll $b \geq 0$ gelten.

Löse sowohl das primale als auch das duale LP aus Aufgabe G19 vom 6. Übungsblatt. Gilt für die Optimallösungen der ursprünglichen nicht in die Standardform gebrachten Probleme strikte Komplementarität?

Aufgabe R6 (Erweiterung zur Phase I)
Erweitere deine Phase I aus Aufgabe R4, sodass das Programm im Falle von rang(A)<m nicht abbricht, sondern dass eine Basisergänzung über die künstlichen Variablen durchgeführt wird.

Hausübung

Aufgabe H25 (Dualer Simplex) (6 Punkte)

Löse folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeige zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Aufgabe H26 (Basen für den dualen Simplex-Algorithmus) (9 Punkte)

Seien $b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$ und $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang. Das duale LP (in der dualen Standardform) hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{rrcl}
\max & b^T y & & \\
\text{s.t.} & A^T y + Iz & = & c \\
 & z & \geq & 0
\end{array} . \tag{1}$$

Sei $D := (A^T, I) \in \mathbf{R}^{n \times (m+n)}$. Eine Menge von Indizes $H \subset \{1, \ldots, n+m\}$ heißt *Basis* von (1), wenn D_H regulär ist. Die zugehörige Basislösung ist dann $u_H := D_H^{-1} c$ und $u_{\{1,\ldots,m+n\} \setminus H} := 0$. Eine Basis heißt *zulässig*, wenn $u_{H \cap \{m+1,\ldots,m+n\}} \geq 0$ gilt, das heißt alle Einträge der Basislösung, die zu z gehören, sollen nichtnegativ sein.

Der duale Simplex-Algorithmus betrachtet nur zulässige Basen H mit der Eigenschaft $\{1, \ldots, m\} \subset H$ und wählt aus diesen eine beste. Es soll gezeigt werden, dass mit dieser Vorgehensweise das Problem (1) gelöst wird. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Das Problem (1) in primaler Standardform lautet

$$\begin{array}{rrcl}
\max & b^T y^+ - b^T y^- & & \\
\text{s.t.} & A^T y^+ - A^T y^- + Iz & = & c \\
 & y^+, y^-, z & \geq & 0
\end{array} . \tag{2}$$

Zeige, dass zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis H von (1) mit gleichem Zielfunktionswert existiert.

(b) Das Problem (2) habe eine Optimallösung. Zeige, dass dann zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis $\tilde{B}$ existiert, deren Zielfunktionswert größer oder gleich dem von B ist, und die die Eigenschaft erfüllt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$i \in \tilde{B} \quad \text{oder} \quad i + m \in \tilde{B} \tag{3}$$

gilt.

Tipp: Nimm o.B.d.A. an, dass für $i = 1$ die Bedingung (3) verletzt ist, das heißt weder y_1^+ noch y_1^- ist in der zulässigen Basis B. Betrachte die reduzierten Kosten von y_1^+ und y_1^-. Zeige anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass y_1^+ oder y_1^- gegen ein z_i mit $i \in B$ ausgetauscht werden kann. Teile dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k \leq 2m$ und γ_2 entsprechend das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k > 2m$ sei.

(c) Beweise mit Hilfe des bisher Gezeigten Satz 5.18 aus der Vorlesung: Das LP (1) habe eine Optimallösung. Dann gibt es eine optimale Basis H_{opt} mit $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{\text{opt}}$.