Einführung in die Optimierung
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
03./04.12.2009

Rechnerübung

Aufgabe R1 (Simplex-Algorithmus)
Implementiere den Simplex-Algorithmus aus der Vorlesung (Algorithmus 5.6). Definiere dazu die Funktion

```
[xOpt, message] = simplex(A, b, c, B).
```

Die Variablen sollen die folgende Bedeutung haben:

- Der Vektor `xOpt` ist eine Optimallösung, falls eine solche existiert.
- Die Zeichenkette (*string*) `message` soll die Mitteilung „Das LP besitzt eine Optimallösung." oder „Das LP ist unbeschränkt."(*unbounded*) beinhalten.
- Die Matrix `A` und die Vektoren `b` und `c` entsprechen denen aus der Standardform (siehe (5.1)). Dabei sollen für $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ die Vorraussetzungen (*assumptions*) $n \geq m$ und $\operatorname{rang}(A) = m$ gelten.
- Der Vektor `B` soll eine zulässige Startbasis (*initial solution*) repräsentieren. Die m Einträge des Vektors sollen die in der Basis enthaltenen Indizes sein.

Teste deine Implementierung mit dem LP aus dem Beispiel 5.7 aus der Vorlesung und mit dem folgenden LP:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Hinweis: Die Befehle `find`, `size`, `zeros` und `min` könnten hilfreich sein. Schaue bei Bedarf in der Hilfe nach. Um ein Gleichungssystem zu lösen ist \ nützlich. Denke auch über die Rechnerungenauigkeit nach.

Aufgabe R2 (Kreiseln (*cycles*))
Gegeben sei das LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 12x_4 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & - & 9x_2 & + & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ & \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & 2x_4 & \leq & 0 \\ & & & & & & & x_1, \ldots, x_4 & \geq & 0 \end{array}.$$

Weise mit Hilfe deiner Implementierung nach, dass der Simplex-Algorithmus bei diesem Beispiel kreiseln (*cycle*) kann. Gib dazu in jeder Iteration die aktuelle Basis sowie alle möglichen eintretenden (*entering*) und verlassenden (*leaving*) Variablen aus und lasse den Benutzer wählen welche Variable in die Basis eintritt und welche sie verlässt.

Aufgabe R3 (Interpretation)
Löse das LP aus der Aufgabe G19 vom 6. Übungsblatt. Lies aus der Optimallösung ab, um wieviel die Belastbarkeit der einzelnen Seile maximal verringert werden kann, sodass das Gerüst die Gewichte noch tragen kann.

Hausübung

Aufgabe H20 (Relaxierungen) (4 Punkte)
Betrachte das folgende LP mit Ganzzahligkeitsbedingungen (*integer problem*). Solche Probleme sind im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Ersetzt man die Ganzzahligkeitsbedingungen (*integer constraints*) $x_i \in \{0,1\}$ durch die linearen Nebenbedingungen (*linear constraints*) $0 \leq x_i \leq 1$, erhält man die sogenannte *LP-Relaxierung* (R) (*relaxation*) von (IP), die wesentlich einfacher zu lösen ist:

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n \end{array} \qquad\qquad (R) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,\dots,n \end{array}$$

Untersuche den Zusammenhang (*correlation*) zwischen (IP) und (R):

(a) Was sagt der Optimalwert von (R) über den Optimalwert von (IP) aus?

(b) Im Allgemeinen erfüllt die Optimallösung von (R) nicht für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ die Bedingung $x_i \in \{0,1\}$. Was kann man für (IP) folgern, wenn dies zufällig doch der Fall ist?

(c) Was folgt aus der Zulässigkeit (*feasibility*) bzw. Unzulässigkeit (*infeasibility*) von (R) für (IP)?

Aufgabe H21 (Ein leicht lösbares LP) (4 Punkte)
Seien $c, l, u \in \mathbf{R}^n$ und sei $l \leq u$. Geben Sie eine explizite Lösung für folgendes LP an:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & l \leq x \leq u \end{array}$$

Aufgabe H22 (Simplexalgorithmus) (3 Punkte)
In Aufgabe H10 (a) wurde das folgende lineare Programm aufgestellt

$$\begin{array}{rr} \max & 150x_1 + 450x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 \leq 120 \\ & x_2 \leq 70 \\ & x_1 + x_2 \leq 140 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Löse das Programm mit dem Simplexverfahren für den Startpunkt $(120, 20)$. Erstelle eine Skizze des Polyeders, das das LP beschreibt und zeichne jede Basislösung ein. Interpretiere jeden Basisaustauschschritt anhand der Zeichnung.

Aufgabe H23 (Basislösungen) (3 Punkte)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Zeige: Besitzt das obige LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe H24 (Simplexalgorithmus) (3 Punkte)
Löse das folgende Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. Beachte, dass das LP nicht in Standardform vorliegt.

$$\begin{array}{rr} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Starte im Punkt $x = (0, 0, 0)$.