Einführung in die Optimierung
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
26./27.11.2009

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Zwei Kegel (*two cones*), die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen und der Schlupf (*slack*))
Betrachte die folgenden zueinander dualen Probleme:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \end{array} \qquad\qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = -c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

und die beiden Kegel (*cones*)

$$\mathcal{N}(x) = \operatorname{cone}(A^T_{\mathrm{eq}(\{x\})\cdot}) = \left\{ \sum_{i \in \mathrm{eq}(\{x\})} \lambda_i A^T_{i\cdot} \mid \lambda_i \ge 0 \text{ für alle } i \in \mathrm{eq}(\{x\}) \right\},$$

$$\mathscr{X}(x) = \left\{ r \in \mathbf{R}^n \mid A_{\mathrm{eq}(\{x\})\cdot} r \le 0 \right\}.$$

(a) Veranschauliche (*illustrate*) die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (Satz 4.12) anhand einer Skizze. Zeichne dazu ein zweidimensionales Polyeder (*polyhedron*), wähle eine Ecke (*vertex*) q und einen inneren Punkt (*interior point*) p einer Kante (*edge*) und skizziere jeweils die Kegel $\mathcal{N}$ und $\mathscr{X}$. Für welche c ist q beziehungsweise p eine Optimallösung?

(b) Formuliere die KKT-Bedingungen unter Verwendung von $\mathcal{N}(x)$.

(c) Skizziere einen Fall, in dem x und c so gewählt sind, dass kein y die starke Komplementarität (*strong complementarity*) erfüllt.

Aufgabe G18 (Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*))
Gegeben sei das lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{lll} \min & x_1 - x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le 5 \\ & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge 0. \end{array}$$

(a) Bestimme das dazugehörige duale lineare Programm (DLP).

(b) Stelle die Bedingung des komplementären Schlupfes für die Programme auf und benutze diese, um (LP) und (DLP) zu lösen.

(c) Finde ein, möglichst kleines, Beispiel für ein Optimierungsproblem, bei dem es eine Optimallösung $\bar{x}, \bar{y}$ gibt, in der die Äquivalenzen des Satzes vom starken komplementären Schlupf gelten, und eine Optimallösung $\hat{x}, \hat{y}$, in der die Äquivalenzen nicht gelten. Gib $\bar{x}, \bar{y}$ und $\hat{x}, \hat{y}$ an.

Aufgabe G19 (Modellierung)
Gegeben sei das Hängegerüst wie in Abbildung 1. Die Seile S_1 und S_2 können je 300kg Last, die Seile S_3 und S_4 je 100kg und die Seile S_5 und S_6 jeweils 50kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichts der Seile und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden.

(a) Formuliere dieses Problem als lineares Programm.

(b) Stelle das dazugehörige duale lineare Programm auf und diskutiere die Bedeutung einer Optimallösung.

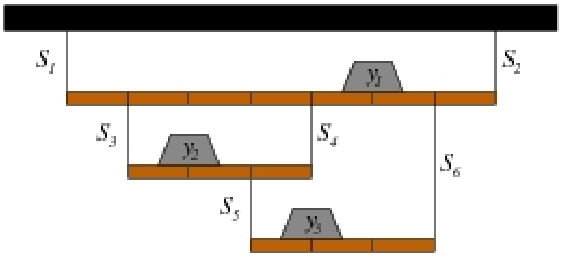

Abbildung 1: Gerüst zu Aufgabe G19

Hausübung

Aufgabe H17 (Aktive Nebenbedingungen (*active constraints*)) (5 Punkte)
Sei x^* eine Optimallösung des linearen Optimierungproblems $\min\{c^T x \mid Ax \le b\}$.
Beweise: Es gilt

$$\min\left\{c^T x \mid Ax \le b\right\} = \min\left\{c^T x \mid A_{\text{eq}(x^*)\cdot} x \le b_{\text{eq}(x^*)}\right\}.$$

Was lässt sich über die Beziehung zwischen den Mengen (*sets*) der Optimallösungen der beiden Optimierungsprobleme aussagen?

Aufgabe H18 (Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)) (5 Punkte)
Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$(P) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \le & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \le & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \le & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \le & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \ge & 0
\end{array}$$

(a) Formuliere das duale Problem zu (P).

(b) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

Aufgabe H19 (Schwache Dualität (*weak duality*)) (4 Punkte)
Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Gib für jede Abschätzung (*estimation*) an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.
Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned}
\max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\} &\le \min\{y^T b : y^T A \ge c^T, y \ge 0\} && (1)\\
&\le \max\{y^T b : y^T A \ge c^T, y \ge 0\} && (2)\\
&\le \min\{c^T x : Ax \ge b, x \le 0\} && (3)\\
&\le \max\{c^T x : Ax \ge b, x \le 0\} && (4)\\
&\le \min\{y^T b : y^T A \le c^T, y \le 0\} && (5)\\
&\le \max\{y^T b : y^T A \le c^T, y \le 0\} && (6)\\
&\le \min\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\} && (7)\\
&\le \max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\} && (8)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit (*equality*), insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.