Einführung in die Optimierung
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
19./20.11.2009

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Duale Programme)

Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$
(P)\qquad
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 7x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Formuliere das duale Problem zu (P).

Hinweis: Bringe (P) zunächst in natürliche Form.

Aufgabe G15 (Farkas-Lemma)

Beweise: Seien $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$
Ax \leq b \qquad \dot{\bigvee} \qquad
\begin{array}{rcl}
y^T A & = & 0 \\
y & \geq & 0 \\
y^T b & < & 0.
\end{array}
$$

Aufgabe G16 (Modellierung)

Lässt sich das folgende Optmierungsproblem als LP formulieren? Wenn ja, dann gib eine solche Formulierung an. Wenn nicht, begründe dies.

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & \max\{x_1, x_4\} & & \\
\text{s.t.} & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 10 \\
 & \max\{x_1, x_2\} & \leq & \min\{x_3, x_4\} \\
 & \dfrac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} & \leq & 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Hausübung

Aufgabe H14 (Zulässige Richtungen (*feasible directions*)) (4 Punkte)

Beweise (*proof*) oder widerlege (*or counterproof*) den folgenden Satz:
$\bar{x}$ ist genau dann Optimallösung von

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \\ c^T s &\leq 0 \ \forall s \in \mathscr{Z}(\bar{x}) := \{s : As = 0,\ s_{\{1,\ldots,n\}\setminus \mathrm{supp}(\bar{x})} \geq 0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe H15 (Farkas-Lemma) (4 Punkte)

Beweise: Für dimensionsverträgliche (*compatible*) Matrizen A, B, C und D sowie Vektoren a, b, u und v hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array} \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcrcl} u^T A & + & \mathrm{v}^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & \mathrm{v}^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & \mathrm{v}^T b & < & 0. \end{array}$$

Aufgabe H16 (Modellierung) (5 Punkte)

Aus zwei Steinbrüchen S_1 und S_2 mit den Vorräten (in Tonnen) $s_1 = 4, s_2 = 23$ ist Schotter auf insgesamt drei Baustellen $B1, B_2, B_3$ zu transportieren. Die Bedarfsmeldungen sind $b_1 = 12, b_2 = 5, b_3 = 6$. Die Transportkosten (pro Tonne) sind wie folgt aufgeschlüsselt:

	B_1	B_2	B_3
S_1	12	5	13
S_2	11	16	17

(a) Gib ein Modell zur Bestimmung eines Transportplans mit minimalen Kosten an.

(b) Bestimme das zugehörige Dualproblem.
Hinweis: Bringe das primale Problem in die Form von Satz 4.9.