Einführung in die Optimierung
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
12./13.11.2009

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Optimallösungen (*optimal solutions*))
Betrachte das lineare Optimierungsproblem $\max\{c^T x \mid x \in \mathscr{P}(A,b)\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Vektoren $c \in \mathbf{R}^2$ hat das lineare Problem

(a) genau eine Optimallösung,

(b) unendlich viele Optimallösungen,

(c) keine Optimallösung?

Gib eine Ungleichung (*inequality*) $a^T x \leq \alpha$ (mit $a \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$) an, sodass das lineare Problem

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, a^T x \leq \alpha\}$$

für jedes $c \in \mathbf{R}^2$ mindestens eine Optimallösung hat.

Aufgabe G12 (Polyeder (*polyhedron*))
Sei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ und (A,b) habe keine Nullzeile (*no row with zeros only*).

(A) Zeigen Sie: *Ein Polyeder $\mathscr{P}(A,b) = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$ hat nur endlich viele Ecken (vertices).*
Finde eine obere Schranke (*upper bound*) $\mu(m,n)$ für die Anzahl der Ecken von $\mathscr{P}(A,b)$ und gib ein Beispiel eines Polyeders an, das genau $\mu(m,n)$ Ecken hat.

(B) Sei $\mathscr{P}(A,b) \subset \mathbf{R}^n$ ein Polytop (*polytope*), und sei x eine Ecke von $\mathscr{P}(A,b)$. x heißt nicht degeneriert (*not degenerated*), falls $|eq(\{x\})| = n$, anderenfalls heißt x degeneriert (*degenerated*).

   (a) Zeige: *Eine nicht degenerierte Ecke ist zu genau n Ecken adjazent.*

   (b) Skizziere ein Polytop, das nur nicht degenerierte Ecken hat, und ein Polytop, das nur degenerierte Ecken hat.

Aufgabe G13 (Modellierung)
Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch die Produktionskapazitäten der drei Hersteller werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Hersteller A	höchstens 2000 Liter zu 35 EUR je Liter,
Hersteller B	höchstens 2500 Liter zu 25 EUR je Liter,
Hersteller C	höchstens 1200 Liter zu 10 EUR je Liter.

Daraus stellt er drei Verschnitte *Sir Roses*, *Highland Wind* und *Old Regent* her, die er zu 34 EUR, 28,50 EUR bzw. 22,50 EUR pro Liter verkauft. Die Zusammensetzung der Verschnitte ist:

Sir Roses	wenigstens 60% von A,
	höchstens 20% von C,
Highland Wind	wenigstens 15% von A,
	höchstens 60% von C,
Old Regent	höchstens 50% von C.

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(a) Modelliere dieses Problem als LP.

(b) Stelle das dazugehörige duale LP auf.

(c) Was muss an dem Modell aus Aufgabenteil (a) geändert werden, wenn man berücksichtigt, dass der Whisky nur flaschenweise verkauft wird (Inhalt einer Flasche: 0.7 Liter).

Hausübung

Aufgabe H11 (Primal & dual) (5 Punkte)

Seien A, B, C, D Matrizen und a, b, c, d Vektoren von geeigneter Dimension. Betrachte ein primales Problem (P) und ein duales Problem (D) der Form

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & a^T x + b^T y \\ \text{s.t.} & Ax + Cy \geq c \\ & Bx + Dy = d \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rl} \max & c^T u + d^T \mathrm{v} \\ \text{s.t.} & A^T u + B^T \mathrm{v} \leq a \\ & C^T u + D^T \mathrm{v} = b \\ & u \geq 0 \end{array}$$

(a) Zeige: Das duale Problem von (D) ist (P).

(b) Formuliere und beweise den schwachen Dualitätssatz für (P) und (D).

Aufgabe H12 (Irredundante Darstellung & Facetten) (6 Punkte)

Sei $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, b)$ mit $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ ein volldimensionales Polyeder, das heißt $\mathrm{eq}(P) = \emptyset$.
Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Sei $i \in M := \{1, \ldots, m\}$ und $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P}(A_{M \setminus \{i\}}, b_{M \setminus \{i\}})$. Dann gilt

$$\mathcal{P} \neq \tilde{\mathcal{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt eine nichttriviale Seitenfläche } \mathcal{F} \text{ von } \mathcal{P} \text{ mit } \mathrm{eq}(\mathcal{F}) = i.$$

Tipp: Zeige, dass es im Fall $\mathcal{P} \neq \tilde{\mathcal{P}}$ einen inneren Punkt der Seitenfläche $\mathrm{fa}(\{i\})$ gibt.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i. Das System $Ax \leq b$ ist irredundant.

ii. Für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $\mathrm{fa}(\{i\})$ ist eine Facette und $\mathrm{fa}(\{i\}) \neq \mathrm{fa}(\{j\})$, wenn $i \neq j$.

Aufgabe H13 (Modellierung) (6 Punkte)

Bei einer großen deutschen Fondsgesellschaft werden die Wertpapierportfolios anhand von Faktoren zusammengestellt, von denen das Fondsmanagement überzeugt ist, dass sie die jeweiligen Aktien gut beschreiben. Diese Faktoren sind Konjunkturabhängigkeit, Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit, und Marktkapitalisierung (Wert aller Aktien des Unternehmens). Das Management benutzt Targets (Zielwerte, die auf langjähriger Erfahrung beruhen), die es mit dem gesuchten Portfolio möglichst gut annähern will: die Konjunkturabhängigkeit sollte 4 sein, die Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit 7 und die Marktkapitalisierung 12. Der betrachtete Marktausschnitt bestehe aus den folgenden Aktien:

Name	Konjunktur	Euro/Dollar	Marktkapitalisierung
Deutsche Bank	2	12	15
DaimlerChrysler	9	15	13
BASF	7	8	6
Eon	3	2	5

(a) Stelle ein lineares Problem zur Bestimmung eines Portfolios auf, das den gegebenen Targets

i. in der Maximumsnorm bzw.

ii. in der 1-Norm

möglichst nahe kommt. Dabei soll das gesamte Kapital investiert werden.

(b) Formuliere für die LPs aus (a)i. und (a)ii. jeweils das duale LP.

(c) Formuliere auch das entsprechende Optimierungsproblem, das bei Verwendung der 2-Norm entsteht.