Einführung in die Optimierung
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
29./30.10.2008

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Konvexe & konkave Funktionen)
Welche der folgenden Funktionen sind konvex, welche konkav, welche weder konvex noch konkav?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2xy - x^2 - y^2$,
(c) $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$,
(d) die Norm $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ mit $(1 \le p \le +\infty)$.

Aufgabe G5 (Epigraph & konvexe Funktionen)

(a) Der Epigraph $\mathscr{E}(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathscr{E}(f) = \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \alpha\}.$$

Stelle $\mathscr{E}(f)$ für $f(x) = x^2$ grafisch dar und beweise folgenden Satz:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist konvex $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{E}(f)$ ist konvex.

(b) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\alpha > 0$. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

$$\alpha f_1, \quad f_1 + f_2, \quad f_1 - f_2, \quad f_1 \cdot f_2, \quad \max[f_1, f_2], \quad \min[f_1, f_2]$$

Beweise oder widerlege.

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \le y \Rightarrow g(x) \le g(y)$). Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.
Zeige, dass $h : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.

Aufgabe G6 (Modellierung)
Ein Käufer möchte 150 000 Stück einer Ware kaufen. Drei Verkäufer legen Angebote vor, die in der folgenden Tabelle beschrieben sind. Es sind jeweils die Fixkosten (sie entstehen unabhängig davon, wie viel gekauft wird) und die Stückpreise in GE angegeben. Diese können je nach gekaufter Menge variieren. Außerdem ist die Lieferkapazität der Verkäufer beschränkt.
Seien x_1, x_2 bzw. x_3 die Stückzahl, die bei Verkäufer 1, 2 bzw. 3 gekauft wird. Ziel ist es, so einzukaufen, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Verkäufer	Fixkosten	Stückpreis	Menge
1	3 520.20	51.20	$0 < x_1 \le 50\,000$
2	82 810.00	52.10	$0 < x_2 \le 20\,000$
		51.10	$20\,000 < x_2 \le 60\,000$
		50.10	$60\,000 < x_2 \le 80\,000$
		49.10	$80\,000 < x_2 \le 100\,000$
3	0	60.50	$0 < x_3 \le 50\,000$
		59.00	$50\,000 < x_3 \le 80\,000$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass beispielsweise für Verkäufer 2 das 20 001ste Stück zu einem günstigeren Preis angeboten wird als die ersten 20 000 Stück.
Formuliere das geschilderte Problem als Optimierungsproblem und untersuche, ob die Zielfunktion konvex oder konkav ist und die zulässige Menge konvex ist.

Hausübung

Aufgabe H4 (Äussere Approximation) (4 Punkte)

(a) Sei $G = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$ eine durch die konvexe, stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ beschriebene Menge. Zeige, dass für beliebige Punkte $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass die Ungleichung

$$g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0 \tag{1}$$

von allen $x \in G$ erfüllt ist.

(b) Betrachte nun im $\mathbb{R}^2$ die Menge G, mit $g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1$. Skizziere die Menge G. Stelle nun die linearisierten Ungleichungen (1) in den Punkten $\bar{x}^1 = (0.5, 0.5)$, $\bar{x}^2 = (0, 1)$ und $\bar{x}^3 = (1, 2)$ auf. Zeichne die dadurch beschriebenen Halbräume ebenfalls in Deiner Skizze ein.

Aufgabe H5 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Definitionen:

Definition 1: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Punkte $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Aufgabe H6 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Zeige, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

(b) Zeige, dass für alle $x \in (a, b)$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Fertige eine Skizze an, die diese Ungleichung illustriert.

Aufgabe H7 (Konvexe Funktionen) (5 Punkte)

(a) Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch

$$\mathscr{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}.$$

Beweise: f ist konvex. $\Rightarrow \mathscr{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.
Gilt auch die Umkehrung?

(b) Beweise:

i. Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch $\text{conv}\mathscr{M}$ kompakt.

ii. Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Dann gilt:

$$\max\{f(x) \mid x \in \mathscr{M}\} = \max\{f(x) \mid x \in \text{conv}\mathscr{M}\}.$$

DISCRETE OPTIMIZATION