

Einführung in die Optimierung

13. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
04./05.02.2010

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Strategie der aktiven Mengen)

Betrachte das quadratische Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 - x_2 \leq -1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Löse dieses Problem mit der Strategie der aktiven Menge, wobei als Startpunkt $x^0 = (1, 1)$ verwendet werden soll. Skizziere die zulässige Menge und zeichne die Iterationspunkte x^k ein.

Aufgabe G32 (Quadratische Probleme)

Zeige: Das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

mit $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ vom Rang m und $b \in \mathbf{R}^m$ besitzt (unter der Annahme, dass die zulässige Menge nicht leer ist) eine eindeutige Lösung.

Aufgabe G33 (KKT-Bedingungen)

Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 - x_2 + 10 \leq 0 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

- (a) Zeige, dass im Punkt $x^* = (3, 1)$ die KKT-Bedingungen erfüllt sind. Bestimme dabei auch den zugehörigen Lagrange-Multiplikator u^* .
- (b) Zeige mit Hilfe der KKT-Bedingungen, dass sich in $\bar{x} = (\frac{15}{4}, \frac{5}{4})$ kein Optimum befindet.

Hausübung

Zum Erreichen des Übungsscheines werden die Punkte dieser Hausübung nicht mehr benötigt (100 % der Übungspunkte = alle Punkte der Hausübungen der ersten 12 Übungsblätter). Für diejenigen, die jedoch noch Punkte benötigen, können die Punkte dieser Hausübung noch angerechnet werden. Auch wenn die Punkte nicht mehr zählen, so ist es doch hilfreich, die Übungen zu machen und mehr Wissen für die Klausur und die mathematische Allgemeinbildung zu sammeln.

Aufgabe H1 (Quadratische Probleme)

(5 Punkte)

Formuliere ein quadratisches Optimierungsproblem im \mathbf{R}^n , das 2^n verschiedene lokale Minima besitzt.

Aufgabe H2 (Modellierung)

(5 Punkte)

Mit dem Satelliten-Kontroll-System GPS kann ein GPS-Gerät, seine Position auf der Erde bis auf eine Genauigkeit von etwa 10 Metern bestimmen. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Jeder Satellit verfügt über eine Atomuhr. Von den Satelliten im Orbit der Erde wird die aktuelle Zeit und die aktuelle Position gesendet. Empfängt das GPS-Gerät die Signale von mindestens vier Satelliten, läßt sich daraus die aktuelle Zeit sowie die aktuelle Position des GPS-Geräts bestimmen. Stelle ein Optimierungsproblem zur möglichst genauen Berechnung der Position des GPS-Gerätes auf.