

Einführung in die Optimierung

12. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
28./29.01.2010

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Tangentialkegel)

Sei

$$\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \begin{aligned} -2x + y - 1 &\leq 0, \\ -2x - y - 1 &\leq 0, \\ x + y - 1 &\leq 0 \\ x - y - 1 &\leq 0 \}. \end{aligned}$$

- Skizziere die Menge \mathcal{X} .
- Bestimme die Tangentialkegel von \mathcal{X} in den Punkten $p_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_3 = (0, 0)$ und zeichne die Tangentialkegel von \mathcal{X} in p_1 und p_2 in die Skizze ein.
- Bestimme anhand der Skizze alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe G29 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)

Formuliere analog zum Satz 7.2 aus der Vorlesung die notwendige Optimalitätsbedingung für den Fall, dass

- es sich um ein Maximierungsproblem handelt,
- die lokale Lösung \bar{x} ein innerer Punkt von \mathcal{X} ist.

Aufgabe G30 (Lokale Minima)

Betrachte das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

mit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^2$. Überprüfe jeweils, ob der Punkt x^*

- sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,
 - eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.
- $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1\}$; $x^* = (1, 2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1, 1)^T$.
 - $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1, 2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1, 0)^T$.
 - $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$; $x^* = (1, 2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0, 0)^T$.

Hausübung

Aufgabe H37 (KKT-Bedingungen)

(5 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P1) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Formuliere die KKT-Bedingungen für (P1). Verifiziere für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?

Aufgabe H38 (Tangentialkegel)

(4 Punkte)

Seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Beweise oder widerlege:

- Sei $x \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ und bezeichne \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 den Tangentialkegel von \mathcal{X}_1 bzw. \mathcal{X}_2 in x . Dann ist der Tangentialkegel von $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ in x die Menge $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2$.
- Sei $x \in \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ und bezeichne \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 den Tangentialkegel von \mathcal{X}_1 bzw. \mathcal{X}_2 in x . Dann ist der Tangentialkegel von $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ in x die Menge $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$. (Für den Fall, dass $x \notin \mathcal{X}$ gilt, sei der Tangentialkegel von \mathcal{X} in x als die leere Menge definiert.)