Einführung in die Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
21./22.01.2010

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Größe der Ecken von Polyedern)
Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 | Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | Bx \leq d, x \geq 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathsf{v} = (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_3, \mathsf{v}_4)$ eine beliebige Ecke von P und sei $\mathsf{v}_i, 1 \leq i \leq 4$, eine beliebige Koordinate von v. Gib obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|\mathsf{v}_i|$ an. Löse dieselbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3)$ von Q. Kann man diese Schranken verbessern?

Aufgabe G27 (Die Ellipsoidmethode)

(a) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens, um zu entscheiden, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht?

(b) In der ersten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_1 = (0,0)^T$ und $A_1 = 2I$ gegeben. Sei $x + y \leq -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Bestimme a_2 und A_2 und stelle die Ellipsoide $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ sowie die Geraden $g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = -1\}$ und $g_t := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ graphisch dar.

Hausübung

Aufgabe H34 (Streuung und Kodierungslänge) (3 Punkte)
Gegeben ist eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.
Welche Werte kann a annehmen, wenn $\langle a \rangle = 5$? Schreibe alle Möglichkeiten auf und sortiere sie der Größe nach. Welches ist der kleinste Wert, welches der kleinste Wert, der größer als Null ist, welches ist der größte Wert?

Aufgabe H35 (Die Ellipsoidmethode) (7 Punkte)
Betrachte folgendes Polytop $\mathscr{P}$ in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ 3x_1 & & & \leq & 4 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Stelle mit Hilfe der Ellipsoidmethode fest, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht. Verwende als Anfangsellipsoid einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 7. (Rechne bitte auf vier Nachkommastellen genau.)

Aufgabe H36 (Der Kettenbruchalgorithmus) (5 Punkte)
Das Problem, reelle Zahlen durch rationale Zahlen zu approximieren, ist ein altes und bekanntes Problem aus der Zahlentheorie. In dieser Aufgabe wollen wir das zweidimensionale Approximationsproblem angehen. Dieses Resultat ist hilfreich, um die Äquivalenz des Separierungs- und des Optimierungsproblems zeigen. Dazu betrachten wir folgendes

Problem:
Gegeben sei eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}, 0 < \varepsilon < 1$. Gesucht sind ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 \le q \le \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht einzusehen, dass solch eine rationale Zahl immer existiert, aber genau dies ist der Fall. Mehr noch, eine solche Zahl kann sogar in polyno mialer Zeit bestimmt werden. Dazu dient der folgende Algorithmus:

Input: $\alpha \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Output: p und q mit $1 \le q \le \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

(1) Initialisierung:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, & a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor, \\ g_{-2} &= 0, & g_{-1} &= 1, \\ h_{-2} &= 1, & h_{-1} &= 0, \\ i &= -1. \end{aligned}$$

(2) Führe die folgenden Schritte durch:

(3) $i = i + 1$

(4) $g_i = a_i g_{i-1} + g_{i-2}$

(5) $h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$

(6) Falls $h_i > \frac{1}{\varepsilon}$ **STOP** (gib $p = g_{i-1}$ und $q = h_{i-1}$ aus).

(7) Falls $\alpha_i = a_i$ **STOP** (gib $p = g_i$ und $q = h_i$ aus).

(8) $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$

(9) $a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$

(10) Gehe zu (3).

Approximiere den Wert $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0,01$ durch eine rationale Zahl. D.h. finde

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < \frac{0,01}{q}, \quad 1 \le q \le 100.$$