Einführung in die Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl. Math. Andrea Peter

WS 2009/2010
14./15.01.2010

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Ellipsoide)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichne das Ellipsoid $\mathscr{E}(A,a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \le 1\}$.

(b) Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbf{R}^n$. Zeige, dass das Ellipsoid

$$\mathscr{E}(A,a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \le 1\}$$

das Bild der Einheitskugel (*image of the union ball*) $\mathscr{B} = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \|u\|_2 \le 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{\frac{1}{2}}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E}(A,a) = \{a + A^{\frac{1}{2}}u \mid \|u\|_2 \le 1\}.$$

Aufgabe G24 (Kodierungslänge)

Zeige:

(a) Für jede Matrix $D \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ gilt: $\langle \det D\rangle \le 2\langle D\rangle - n^2$.

(b) Ist $D \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ gilt: $\langle \det D\rangle \le \langle D\rangle - n^2 + 1$.

Aufgabe G25 (Innere-Punkte-Verfahren)

Neben Simplex-und Ellipsoidmethode gibt es noch eine weitere Klasse von Verfahren zur Lösung von LP's. Anstatt wie im Simplexalgorithmus die Ecken des Zulässigkeitsbereichs abzuwandern, verfolgen diese Methoden einen 'zentralen Pfad' im Inneren des Polytops, bis sie gegen einen Optimalpunkt konvergieren. Wir wollen nun ein Beispiel eines solchen zentralen Pfades betrachten.

Wir möchten das LP $\max c^T x,\ s.t.\, Ax \le b,\ x \ge 0$ lösen. Das Einführen von Schlupfvariablen liefert die Nebenbedingungen $Ax + w = b, x \ge 0, w \ge 0$. Für ein $\mu > 0$ betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} &\max c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) \\ &s.t.\, Ax + w = b. \end{aligned} \tag{*}$$

Für jeden inneren Punkt des Polytops $P := \{(x,w) : Ax + w = b, x \ge 0, w \ge 0\}$ gilt $(x,w) > 0$. Da der Logarithmus für Werte gegen 0 immer negativer wird, wird die obige Zielfunktion immer kleiner, je näher (x,w) dem Rand kommt. Unter geeigneten Voraussetzungen, gibt es für jedes $\mu > 0$ eine Lösung $(x^*(\mu), w^*(\mu))$ von (*) und $(x^*(0), w^*(0))$ ist offensichtlich die Lösung des ursprünglichen Problems. Wir wollen nun die Lösungen von (*) untersuchen.

(a) Sei

$$L(x,w,y) = c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) + y^T(b - Ax - w)$$

die sogenannte Lagrangefunktion zu (*). Man kann zeigen, dass ein stationärer Punkt von $L(x,w,y)$, also ein Punkt, für den der Gradient ∇L verschwindet, das Optimierungsproblem (*) maximiert. Zeige, dass ein stationärer Punkt (x^*, w^*, y^*) von L folgende Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} Ax + w &= b, && \text{(I)}\\ A^T y - z &= c, && \text{(II)}\\ y_i w_i &= \mu,\ i = 1,\dots m, && \text{(III)}\\ x_j z_j &= \mu,\ j = 1,\dots n. && \text{(IV)} \end{aligned}$$

(b) Das System (I) beschreibt die Gleichungsrestriktionen unseres ursprünglichen LP's, das System (II) beschreibt die Gleichungsrestriktionen des dazu dualen LP's. Für $\mu = 0$ sollten Dir die Gleichungen (III) und (IV) bekannt vorkommen. Woher?

Hausübung

Aufgabe H31 (Ellipsoide) (5 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und seien $0 \neq c \in \mathbf{R}^n$ und $a \in \mathbf{R}^n$. Bestimme die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1. \end{array}$$

(b) Zeige, dass Ellipsoide konvexe Mengen sind.

(c) Zeige, dass für das Volumen des Ellipsoids $\mathscr{E} = \mathscr{E}(A,a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$ gilt:

$$\operatorname{vol} \mathscr{E} = \sqrt{\det A} \cdot \operatorname{vol} \mathscr{B},$$

wobei $\mathscr{B}$ die Einheitskugel in $\mathbf{R}^n$ ist.

Aufgabe H32 (Innere-Punkte-Verfahren) (6 Punkte)

Wir möchten uns nun wieder mit dem Innere-Punkte-Verfahren aus Aufgabe G24 beschäftigen. Betrache das LP

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 + x_2 \\ s.t.\ & x_2 \leq 1, \\ & -x_1 \leq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Sei

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \\ 1 - 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix},\ w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu - \sqrt{1+4\mu^2} \\ -1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix}.$$

und $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. Zeige, dass dieser Vektor (x, w, y, z) die Gleichungen (I-IV) aus Aufgabe G24 erfüllt.
Damit ist (x, w, y, z) ein stationärer Punkt von L und löst somit (*), weshalb die Lösungen $(x(\mu), w(\mu), y(\mu), z(\mu))$ einen zentralen Pfad bilden.

(b) Zeichne den zentralen Pfad, also die Lösungen x des Vektors (x, w, y, z) für mindestens 3 Werte von $\mu > 0$ und für $\mu = 0$ in dem Zulässigkeitsbereich des gegebenen LP's ein.

Aufgabe H33 (Modellierung) (3 Punkte)

In der Woche vor den Vordiplomsklausuren soll das Lernzentrum Mathematik (LZM) mit wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern besetzt sein. An jedem Tag gibt es drei Zeiten (9–11, 11–13 und 13–15 Uhr), an denen jeweils eine Person im Lernzentrum sitzt. Die Einteilung der Mitarbeiter auf die Zeiten und Tage ist Aufgabe von Frau Drexler. Jeder Mitarbeiter hat dazu einen "Wunschzettel" ausgefüllt, aus dem hervorgeht, welche Termine am besten (1) bzw. alternativ (2) passen würden. Als Beispiel die Termine von Mitarbeiterin XY:

	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.
9–11	(2)	(1)	(1)	(2)	
11–13	(2)	(1)	(1)		
13–15		(1)			

Jeder Mitarbeiter soll höchstens einmal eingesetzt werden.

Modellieren Sie Frau Drexlers Zuordnungsproblem als ganzzahliges lineares Problem. Ziel ist es, so vielen Mitarbeitern wie möglich ihren Erstwunsch zu erfüllen. Beachten Sie, dass es mehr Mitarbeiter als Zeiten gibt (d.h. einige Mitarbeiter werden leer ausgehen).