Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
10.02.2010

12. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (Optimale Steuerung)

Wir untersuchen das folgende Anwendungsbeispiel. Ein gegebenes Werkstück aus Stahl soll durch Erwärmung ein bestimmtes Temperaturprofil y_d erreichen. Praktischerweise hat dieses Werkstück die Form des Einheitsintervalls $[0,1]$. Das Temperaturverhalten beschreiben wir vereinfacht mit der *stationären Wärmeleitgleichung*, d.h. folgender Differentialgleichung:

$$-y''(x) = u(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

wobei $y(x)$ das Temperaturprofil und $u(x)$ die Wärmequellstärke ist.
Da bei der Wärmebehandlung von Stahl i.d.R. große Temperaturen auftreten, erfolgt der Wärmeaustausch mit der Umgebung bei $x = 0$ und $x = 1$ über Wärmestrahlung. Diese wird modelliert durch folgende Randbedingungen:

$$y'(1) + \alpha y(1)^4 = \alpha y_a^4 \tag{2}$$

$$-y'(0) + \alpha y(0)^4 = \alpha y_a^4, \tag{3}$$

mit gegebener Umgebungstemperatur $y_a = konst.$

Wir gehen davon aus, dass wir die Wärmequellstärke direkt einstellen können. Mit Hilfe einer passenden Wärmequellstärke u (der *optimalen Steuerung*) soll der Abstand zwischen Temperatur y und gegebener Zieltemperatur y_d im quadratischen Mittel minimiert werden. Die Zielfunktion lautet daher:

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x) - y_d(x))^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u(x)^2 dx \tag{4}$$

mit einem positiven Gewichtungsparameter $\nu > 0$. Der zweite Term, also $\nu/2 \int_0^1 u(x)^2 dx$ misst den Aufwand der eingesetzten Wärmequellstärke, und man favorisiert Wärmequellen, die möglichst wenig Energie verbrauchen.

Außerdem ist die Wärmequellstärke aus technischen Gründen limitiert, was durch punktweise Beschränkungen an u modelliert wird:

$$u_a \leq u(x) \leq u_b, \tag{5}$$

mit gegebenen $u_a, u_b \in \mathbb{R}$ mit $u_b > u_a$.

Mit den uns bekannten Methoden können wir dieses Problem nicht behandeln, da es sich um eine unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe handelt. Daher überführen wir dieses Problem in ein endlichdimensionales und diskretisieren den Zustand $y(x)$ und die Steuerung $u(x)$. Dazu wird das Intervall $[0, 1]$ in n Teile der Länge $h = 1/n$ zerlegt. Die Funktionen approximieren wir durch ihre Funktionswerte in den Endpunkten $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$ dieser Teilintervalle wie folgt

$$y_h := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_h := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}.$$

Die zweite Ableitung approximieren wir durch den zentralen Differenzenquotienten

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Die ersten Ableitungen in (2) werden durch die Einführung artifizieller Punkte $x_{-1} = 0 - h$ und $x_{n+1} = 1 + h$ mit zugehörigen y_{-1} und y_{n+1} wie folgt diskretisiert:

$$\begin{aligned} \frac{y_{-1} - y_0}{h} + \alpha y_0^4 &= \alpha y_a^4 \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \alpha y_n^4 &= \alpha y_a^4. \end{aligned} \tag{6}$$

So entsteht als Näherung von (1) und (2) ein endlichdimensionales Gleichungssystem. Die Zielfunktion in (4) diskretisieren wir durch eine einfache Mittelpunktsregel zur numerischen Integration. Die Ungleichungsnebenbedingungen in (5) wiederum betrachten wir einfach in den Stützstellen x_i, d.h. wir fordern $u_a \leq u_i \leq u_b$, $i = 0, ..., n$. Wir erhalten auf diese Weise ein *endlichdimensionales nichtlinearen Optimierungsproblem* (NLP), das wir mit den Mitteln der Vorlesung diskutieren können.

Jetzt die eigentliche Aufgabenstellung:

(a) Stellen Sie das diskrete (NLP) auf Basis der oben beschriebenen Diskretisierung auf. Verwenden Sie dabei als Optimierungsvariable $z = (u_h, y_h)$.

(b) Zeigen Sie, dass dieses (NLP) die (LICQ)-Bedingung in jedem Punkt erfüllt.

(c) Leiten Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen her.

(d) Versuchen Sie die Multiplikatorenregel mit einer weiteren diskretisierten Differentialgleichung zu identifizieren. Wie sieht die zugehörige (kontinuierliche) Differentialgleichung aus (also nicht diskretisiert).

Hinweis: Die zusätzlichen Variablen y_{-1} und y_{n+1} aus (6) sind keine zusätzlichen Unbekannten, weil sie durch (6) festgelegt sind. Sie tauchen deshalb auch nicht im diskreten Gleichungssystem auf.

***Abgabe der Hausübungen:* Bis zum 17. bzw. 19.02.2010 in der Dolivostr. in Raum S 4 10 317 abgeben oder per Mail an `panizzi@gsc.tu-darmstadt.de` schicken.**