Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/2010
27.01.2010

10. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Slater-Bedingung)

Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$(KP) \qquad \min \quad f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad c(x) \leq 0,$$

mit zumindest einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass, falls alle c_i, $i = 1, ..., m$, konvex sind, die sogenannte *Slater-Bedingung*, also

$$\text{Es gibt einen Punkt } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } c(y) < 0$$

eine Constraint Qualification in jedem zulässigen Punkt ist.

Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass, im Falle nichtkonvexer Nebenbedingungen, die Slater Bedingung für jeden zulässigen Punkt von (KP) die (MFCQ) nicht impliziert. Konstruieren Sie hierzu ein Optimierungsproblem mit mindestens einer nichtkonvexen Nebenbedingung, dass folgende Eigenschaften besitzt: Die Slaterbedingung ist für einen Punkt y erfüllt und es gibt einen zulässigen Punkt, der die (MFCQ) verletzt.
Prüfen Sie, ob für Ihr Beispiel die Abadie Constraint Qualification (ACQ) ebenfalls verletzt ist. Falls nicht, versuchen Sie Ihr Beispiel so zu modifizieren, dass auch die (ACQ) trotz Slaterbedingung verletzt ist.

Aufgabe G2 (MPEC: Mathematical Programs with Equilibrium Constraints)

Gegeben sei folgendes Bi-Level-Optimierungsproblem:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \min_{x,y \in \mathbb{R}} \ f(x,y) \\ \text{u.d.N.} \quad y = \operatorname{argmin}_{z \geq 0} z^2 + xz \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) (P) ist quivalent zu

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y\in\mathbb{R}} & f(x,y) \\ \text{u.d.N.} & 2y + x - \lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0,\ y \geq 0,\ \lambda y = 0 \end{cases}$$

(b) In keinem zulässigen Punkt von (P) ist (MFCQ) erfüllt.

(c) In biaktiven Punkten, d.h. Punkten mit $y = \lambda = 0$, ist (ACQ) nicht erfüllt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Gleichungsrestriktionen)

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem:

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{u.d.N.} & Ax = b \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p \leq n$, $b \in \mathbb{R}^p$ und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie:

(a) Erfüllt $\bar{x}$ die KKT-Bedingungen mit $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m$ und gilt zudem

$$s^T \nabla^2 f(\bar{x}) s \geq \alpha \|s\|^2 \quad \forall s \in \operatorname{Kern}(A) \qquad (*)$$

dann ist $\bar{x}$ isoliertes lokales Minimum von (P).

(b) Es sei $f(x) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $A = (1,1,1)$, $b = 3$.
Beweisen sie mit Hilfe von (a), dass $\bar{x} = (1,1,1)^T$ ein isoliertes lokales Minimum von (P) ist.

Aufgabe H2 (Modellierung)

Mit dem Satelliten-Kontroll-System GPS kann ein entsprechend ausgestattetes GPS-Gerät, zum Beispiel ein Handy, seine Position auf der Erde bis auf eine Genauigkeit von etwa 10 Metern bestimmen. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Die Satelliten und das Handy sind nach einer Atomuhr genau eingestellt. Von den Satelliten im Orbit der Erde wird die aktuelle Zeit gesendet. Das Handy empfängt diese Signale jeweils mit einer gewissen Zeitverzögerung. Anhand dieser Zeitverzögerung und der Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit wird der Abstand zu den jeweiligen Satelliten berechnet und anschließend die Position auf der Erde bestimmt. Um diese Berechnung durchführen zu können, müssen sich mindestens drei Satelliten im Empfangsbereich des GPS-Gerätes befinden.

Stellen Sie ein nichtlineares Optimierungsproblem zur möglichst genauen Berechnung der Position des GPS-Gerätes auf, wobei dem GPS-Gerät die Position der Satelliten, die jeweiligen Zeitverzögerungen, der maximale und minimale Erdradius und die Lichtgeschwindigkeit bekannt sind.

Aufgabe H3 (Optimalitätsbedingungen des TR-Problems)

Gegeben sei die quadratische Funktion

$$q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}^n, H \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ symmetrisch,}$$

und für $\Delta > 0$ das Trust-Region-Problem

$$\min q(s) \quad \text{u.d.N. } \|s\|_2 \leq \Delta. \tag{TP}$$

(a) (Notwendige Bedingungen) Sei $\bar{s}$ ein lok. Min. des Trust-Region-Problems (TP). Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \geq 0$ gibt, so dass die Bedingungen

(1) $(H + \lambda I)\bar{s} = -c$,

(2) entweder $\|\bar{s}\|_2 = \Delta$ oder $\|\bar{s}\|_2 < \Delta$ und $\lambda = 0$

erfüllt sind. (Dies sind die Bedingungen (1) und (2) aus Aufgabe H1, 7. Übungsblatt.)
Hinweis: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\frac{1}{2}\|s\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\Delta^2$ statt $\|s\|_2 \leq \Delta$.

(b) (Hinreichende Bedingungen) Sei $\bar{s}$ ein KKT-Punkt mit Lagrange-Multipikator $\bar{\lambda}$ und $T_K(c; \bar{s}, \bar{\lambda})$ der Kegel der kritischen Richtungen zur Nebenbedingung $c(s) \leq 0$ mit $c(s) = \frac{1}{2}(s^T s - \Delta^2)$:

$$T_K(c; \bar{s}, \bar{\lambda}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla c(\bar{s})^T d = \left\{ \begin{array}{ll} = 0, & \text{falls } c(\bar{s}) = 0, \bar{\lambda} > 0 \\ \leq 0, & \text{falls } c(\bar{s}) = 0, \bar{\lambda} = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Außerdem erfülle $\bar{s}$

$$d^T (H + \bar{\lambda} I) d > 0 \quad \forall d \in T_K(\bar{s}, \bar{\lambda}) \setminus \{0\}. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass $\bar{s}$ dann ein isoliertes lokales Optimum von (TP) ist. Vergleichen Sie diese hinreichende Bedingung mit Bedingung (3) in Aufgabe H1 auf dem 7. Übungsblatt, also

$$H + \bar{\lambda} I \text{ ist pos. semidefinit.} \tag{$**$}$$

Konstruieren Sie ein Beispiel mit $n = 1$ und einem lok. Min., das $(*)$ aber nicht $(**)$ erfüllt.

***Abgabe der Hausübungen:* Am 03.02. bzw. 05.02.2010 in der Übung.**