Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
19.01.2010

9. Übungsblatt zur „Nichtlineare Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Sattelpunktsprobleme)

Gegeben sei eine symmetrische und positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine weitere Matrix $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ mit $\mathrm{rang}(A) = p$. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} H & A^\top \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^p$ eine eindeutige Lösung besitzt, so dass die Matrix $(H, A^\top; A, 0)$ invertierbar ist.

Hinweis: Identifizieren Sie $(*)$ als notwendige Optimalitätsbedingung (KKT-Bedingung) eines Optimierungsproblems mit Gleichungsnebenbedingungen. Zeigen Sie, dass dieses Optimierungsproblem äquivalent zu $(*)$ ist, und nutzen Sie dessen Konvexität, um die Aussage zu beweisen. Hierbei wichtig: Satz 3.2.20 im Skript und Aufgabe G3.

Aufgabe G2 (KKT-Bedingungen)

Gegeben seien stetig differenzierbare Funktionen f_j und h_i von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Betrachen Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ \text{s.t.} & h_i(x) = 0\ , \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$

Sei $\bar{x}$ ein lokales Minimum dieses Problems, und seien die Gradienten $\nabla h_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, p$, linear unabhängig. Beweisen Sie, dass dann Vektoren $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p)$ und $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m)$ existieren mit

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j \nabla f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} \geq 0, \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j = 1, \tag{1}$$

$$\text{Für alle } j = 1, \ldots, p \text{ gilt: } \bar{\lambda}_j > 0 \Longrightarrow f_j(\bar{x}) = \max\{f_1(\bar{x}), \ldots, f_p(\bar{x})\}. \tag{2}$$

Hinweis: Formulieren Sie das Problem geeignet in ein Optimierungsproblem mit differenzierbarer Zielfunktion um, bei dem die obige Zielfunktion in geeigneter Form in den Nebenbedingungen auftaucht. Führen Sie dazu eine zusätzliche Variable ein.

Aufgabe G3 (Gültigkeit verschiedener Constraint Qualifications)

Der Zulässigkeitsbereich $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Ungleichungen bestimmt:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 2, \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass in $\bar{x} = (0, 0)$ die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) erfüllt ist, die Linear Independence Constraint Qualification (LICQ) jedoch verletzt ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (KKT-Bedingungen)

Gegeben seien folgende Optimierungsprobleme:

$$(P1) \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (P2) \quad \begin{array}{rcl} (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2 & \to & \min \\ x_2 - x_1^2 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P1). Verifizieren Sie für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?

(b) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P2) und verifizieren Sie, dass diese im Punkt $x_* = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ erfüllt sind. Interpretieren Sie die KKT-Bedingungen in x_* geometrisch. Gilt diese Interpretation allgemein für Probleme mit Ungleichungrestriktionen?

Aufgabe H2 (KKT-Bedingungen)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \|x\|^2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \end{array}$$

Existiert eine Lösung? Wenn ja, berechnen Sie sie mit Hilfe der KKT-Bedingungen (Achtung: Constraint Qualification verifizieren). Warum ist die Lösung eindeutig?

Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Fälle: Ungleichungs-Lagrange-Multiplikator gleich Null bzw. größer Null.

Abgabe der Hausübungen: **Am 27 bzw. 29.01.2010 in der Übung.**