Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
13.1.2010

8. Übungsblatt zur „Nichtlineare Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Trennungssatz von Hahn-Banach in $\mathbb{R}^n$)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex und $z \notin C$. Zeigen Sie:

- Dann gibt es einen Vektor $s \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, so dass
$$\langle s, z\rangle > \sup_{x\in C}\langle s, x\rangle. \tag{$*$}$$
- Ist C zudem ein Kegel (also $x \in C \;\Rightarrow \lambda\, x \in C\; \forall\, \lambda \geq 0$), dann wird das Supremum in $(*)$ mit 0 angenommen, d.h. es gibt ein $s \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, so dass
$$\langle s, z\rangle > \max_{x\in C}\langle s, x\rangle = 0. \tag{$**$}$$

Aufgabe G2 (Hilfsatz)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{n,p}$. Dann ist die Menge
$$C = \{x \in \mathbb{R}^n x = Au + Bv,\;\; u \in \mathbb{R}^m,\;\; v \in \mathbb{R}^p,\;\; u \geq 0\}$$
ein abgeschlossener, konvexer Kegel.

Aufgabe G3 (Lemma von Farkas)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

i) Für alle $s \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T s \leq 0$ und $B^T s = 0$ gilt $\langle b, s\rangle \leq 0$.
ii) Es gibt $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$, und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $b = Au + Bv$.

Im Fall $m = 0$ bzw. $p = 0$ fallen A und u bzw. B und v weg.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konische Hülle und Tangentialkegel)

Definition: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in S$ fest.

$$K(S,x) := \{\alpha(s-x) | s \in S, \alpha > 0\}$$

heisst *konische Hülle.*

(i) Zeichnen Sie $x + K(S,x)$ und $x + T(S,x)$ (Tangentialkegel) im Fall von $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T x \leq 1\}$ und $x = (0,1)$.

(ii) Zeigen Sie:
- Es gilt $T(S,x) \subset \overline{K(S,x)}$.
- Ist S zusätzlich konvex, dann ist $T(S,x) = \overline{K(S,x)}$.

Aufgabe H2 (Linearisierungskegel der Einheitskugel)

Seien $C = \{x : x^T x - 1 \leq 0\}$ und $x \in \partial C$ gegeben. Ferner bezeichnen $K(C,x)$ die konische Hülle und $T_L(C,x)$ den Linearisierungskegel. Zeigen sie, dass $T_L(C,x) = \overline{K(C,x)}$.

(Man beachte: da C konvex ist, folgt daraus zusammen mit der Aussage von (H1), dass $T_L(C,x) = T(C,x)$, also dass die Abadie Constraint Qualification erfüllt ist.)

Hinweis: Zeigen sie 1) $K(C,x) \subset T_L(C,x)$ und 2) $\operatorname{int} T_L(C,x) \subset K(C,x)$ und verwenden Sie bei 1) die Young'sche Ungleichung.

Aufgabe H3 (Optimalpunkt ohne Constraint Qualification)

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbf{R}^2} -x_1 \quad \text{u.d.N. } x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$$

(a) Ermitteln Sie graphisch die Lösung $\bar{x}$.

(b) Ermitteln Sie den Tangentialkegel $T(Z,\bar{x})$ sowie den Linearisierungskegel $T_L(c,h;\bar{x})$ für $\bar{x} = (1,0)$ und den Zulässigkeitsbereich Z. Weisen Sie nach, dass keine Constraint Qualification in $\bar{x}$ gelten kann.