Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
9.12.2009

7. Übungsblatt zur „Nichtlineare Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (Exakte Lösung eines Trust-Region-Problems)

Für die quadratische Funktion

$$q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \qquad \text{mit } c \in \mathbf{R}, H \in \mathbf{R}^{n,n} \text{ symmetrisch,}$$

betrachten wir für $\Delta > 0$ das Problem

$$\min q(s) \qquad \text{u.d.N. } \|s\| \leq \Delta. \tag{P}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Problem (P) besitzt eine Lösung.

(b) Wenn es ein $\lambda \geq 0$ gibt, so dass die Bedingungen

$$(H + \lambda I)\bar{s} = -c \tag{1}$$

$$\lambda(\|\bar{s}\| - \Delta) = 0 \tag{2}$$

$$H + \lambda I \text{ ist positiv semidefinit} \tag{3}$$

erfüllt sind, dann ist $\bar{s}$ eine Lösung von (P).

Hinweise:

- Beachten Sie, dass aus (2) folgt, dass entweder $\|\bar{s}\| = \Delta$ oder $\|\bar{s}\| < \Delta$ und $\lambda = 0$.
- Betrachten Sie zunächst die Funktion $\tilde{q}(s) := c^T s + \frac{1}{2} s^T (H + \lambda I) s = q(s) + \frac{\lambda}{2}\|s\|^2$ und zeigen Sie, dass $\bar{s}$ ein globales Optimum von $\min_{s \in \mathbf{R}^n} \tilde{q}(s)$ ist.

Bemerkung: Die Bedingungen (1)–(3) sind nicht nur hinreichend, sondern auch *notwendige* Optimalitätsbedingungen, wie wir im Zusammenhang mit der Karush-Kuhn-Tucker-Theorie noch sehen werden.

Aufgabe H2 (Beispiel für ein Trust-Region-Problem)

Gegeben sei

$$\min c^T s + \frac{1}{2} s^T H s \quad \text{u.d.N.} \quad \|s\| \leq \sqrt{2}, \text{ mit } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen an (siehe letzte Aufgabe).

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Trust-Region-Problems.
Hinweise: Berechnen Sie s in Abhängigkeit von λ aus der notwendigen Optimalitätsbedingung (1), d.h. $s = s(\lambda) = -(H+\lambda I)^{-1}c$, und die zugehörige Norm $p(\lambda) = \|s(\lambda)\|$. Zeigen Sie dann, dass $\lambda \neq 0$ im Optimum, und berechnen Sie daraus das zugehörige Optimum $\bar{s}$ unter Ausnutzung von (1)–(3). Betrachten Sie den Fall $\lambda = 1$ gesondert.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 16. bzw. 18.12.2009 in der Übung.