Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
2.12.2009

6. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Das Gauss-Newton-Verfahren)

Die Globalisierung des Newton-Verfahrens für Gleichungssysteme $F(x) = 0$, mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ erfolgt üblicherweise auf Basis des Minimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Newton-Gleichung von (1).

(b) Beim Gauss-Newton-Verfahren bestimmt man die Suchrichtung s_k als Lösung der Gauss-Newton Gleichung

$$F'(x_k)^T F'(x_k) s_k = -F'(x_k)^T F(x_k). \tag{GN}$$

Welcher Term wurde im Vergleich mit der Newton-Gleichung für (1) hier vernachlässigt? Zeigen Sie, dass die Gauss-Newton-Gleichung (GN) zur klassischen Newton-Gleichung für $F(x) = 0$ äquivalent ist, wenn $F'(x_k)$ invertierbar ist.

(c) Sei $\bar{x}$ eine Nullstelle von F und $F'(\bar{x})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass (GN) auf ein Newton-artiges Verfahren für das Problem (1) führt, welches für $x_k \to \bar{x}$ die Dennis-Moré-Bedingung erfüllt.

(d) Verwendet man das globalisierte Newton-artige Verfahren (Algorithmus 10) für (1) mit der Matrix $M_k = F'(x_k)^T F'(x_k)$, so nennt man das Verfahren *globalisiertes Gauss-Newton-Verfahren*. Sei die Niveaumenge $N_f(x_0)$ zum Startpunkt x_0 kompakt. Zeigen Sie mit Sätzen aus der Vorlesung:

   i. Jeder Häufungspunkt $\bar{x}$ von (x_k) erfüllt $F'(\bar{x})^T F(\bar{x}) = 0$. Ist $F'(\bar{x})$ invertierbar, so gilt zudem $F(\bar{x}) = 0$.

   ii. Hat (x_k) einen Häufungspunkt $\bar{x}$, in dem $F'(\bar{x})$ invertierbar ist, dann gilt $F(\bar{x}) = 0$ und (x_k) konvergiert superlinear gegen $\bar{x}$. Ist F' lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenz sogar quadratisch.

Hausübung

Aufgabe H1 (BFGS Update)

(a) Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie: Ist $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ positiv definit, dann ist auch B positiv definit.

(b) H_k sei symmetrisch und positiv definit und es gelte $y_k^T d_k > 0$. Der BFGS-Update ergibt:

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k d_k (H_k d_k)^T}{d_k^T H_k d_k} + \frac{y_k y_k^T}{(y_k^T d_k)}.$$

Zeigen Sie, dass H_{k+1} dann positiv definit ist.

Hinweise:

– Nutzen Sie dabei (a) aus.

– Jeder Vektor v lässt sich schreiben als $v = \lambda d_k + u$ mit $u \perp d_k$.

Aufgabe H2 (BFGS Update)

Sei H_k symmetrisch und positiv definit. Die Rang-1-Modifikation beim BFGS-Update ist gegeben durch:

$$\tilde{H}_k = H_k - \frac{H_k d_k (H_k d_k)^T}{d_k^T H_k d_k}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{H}_k d_k = 0$ gilt und $\tilde{H}_k$ positiv semidefinit ist. Warum ist $\mathrm{Rang}(\tilde{H}_k) = 1$?
Nuten Sie auch hier die Hinweise aus Aufgabe H1.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 9 bzw. 11.12.2009 in der Übung.