Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
11.11.2009

4. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Unzulässige Schrittweiten mit der Armijo-Regel)

Wählt man im allgemeinen Abstiegverfahren zulässige Richtungen s_k, so liefert die Armijo-Bedingung alleine nicht immer zulässige Schrittweiten, wenn $\|s_k\|$ zu schnell gegen 0 geht. Zur Demonstration untersuchen wir die Suchrichtungen $s_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{2^k}$ zur Minimierung einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die s_k zulässige Suchrichtungen liefern.

(b) Zeigen Sie am Beispiel $f(x) = \frac{x^2}{4}$, dass mit Startpunkt $x_0 > 0$ und mit der Wahl $\gamma \leq \frac{3}{4}$ in der Armijo-Regel stets $\sigma_k = 1$ gewählt wird und diese Schrittweitenwahl unzulässig ist. Konvergiert der Algorithmus?

Hinweis:
Sie dürfen die Abschätzung $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k+1}(1 - \frac{1}{2^{i+1}}) \geq a$ verwenden, wobei $a > 0$ eine feste Zahl ist.

Aufgabe G2 (Newton Verfahren für Minimierungsprobleme)

Gegeben sei eine Abbildung $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Sei $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ ein Lösung der nichtlinearen Gleichung $F(x) = 0$. Eine Nullstelle von F ist auch lokale Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2.$$

Umgekehrt ist eine lokale Lösung $\bar{x}$ mit dem Optimalwert $f(\tilde{x})$ des Optimierungsproblems eine Nullstelle von F.
Sei $x \in \mathbf{R}^n$ ein Punkt, für den $F'(x)$ invertierbar ist und $F(x) \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Newtonrichtung der nichtlinearen Gleichung eine Abstiegsrichtung für f in x ist.

Aufgabe G3 (Divergenz des Newtonverfahrens für schlechte Startpunkte)

Betrachten Sie die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = |x| - \arctan(|x|)$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion für keinen Startpunkt $|x_0| \geq 2$ gegen das (eindeutige) Minimum von f konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (Problemfälle beim Newtonverfahren)

Betrachten Sie das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = |x|^p$, mit $p > 2$ und Startpunkt $x_0 > 0$ zur Bestimmung des globalen Minimums $\bar{x} = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren Q-linear gegen $\bar{x} = 0$ konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht Q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz der Vorlesung (Satz 2.7.4)?

Aufgabe H2 (Divergenz des Newtonverfahrens für schlechte Startpunkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x - \ln(|x|)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion gegen das lokale Minimum bei $x = 1$?

Abgabe der Hausaufgaben: Am 18. bzw. 20.11.2009 in der Übung.