Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/2010
4.11.2009

3. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (CG-Verfahren)

Wir betrachten das freie Problem mit quadratischer Zielfunktion

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ und festem $b \in \mathbf{R}^n$. Mit $s_0, ..., s_k$ bezeichnen wir die ersten k Abstiegsrichtungen. Sei folgende Voraussetzung erfüllt:

(H) Die Suchrichtungen sind Q-konjugiert, d.h. $s_i^T Q s_j = 0$ für alle $0 \leq i < j \leq k$.

Zeigen Sie durch Induktion nach k: Ist $\nabla f(x_k) \neq 0$, dann gilt:

$$s_i^T \nabla f(x_k) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq i < k. \qquad (*)$$

Aufgabe G2 (Konvergenz des Gradientenverfahrens)

Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und die Niveaumenge $N_f(x_0) := \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ sei kompakt. Zeigen Sie:
Falls das Gradientenverfahren (Algorithmus 2) mit Startpunkt x_0 nicht endlich terminiert, so erzeugt es eine Folge (x_k), für die folgendes gilt:

(a) (x_k) besitzt mindestens einen Häufungspunkt in $N_f(x_0)$.

(b) Es gilt $\nabla f(x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe G3 (Fletcher-Reeves-Verfahren)

Die Adaption des CG-Verfahrens auf allgemeine nichtlineare Probleme heißt *Fletcher-Reeves-Verfahren* und ist durch folgenden Algorithmus gegeben:

Wähle einen Startwert $x_0 \in \mathbf{R}^n$ und die entsprechende Startsuchrichtung $s_0 = -\nabla f(x_0)$.
Für $k = 0, 1, ...$:

1. Falls $\nabla f(x_k) = 0$, STOP.
2. Berechne die Schrittweite σ_k (z.B. nach der Armijo-Regel oder nach der exakten Schrittweitensuche).
3. Setze $x_{k+1} = x_k + \sigma_k s_k$
4. Setze $\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}$, $s_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k s_k$.

Benutzt man in Schritt 4 stattdessen die Formel

$$\beta_k := \frac{(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))^T \nabla f(x_{k+1})}{\|\nabla f(x_k)\|^2},$$

so spricht man vom *Polak-Ribière-Verfahren*.
Zeigen Sie: Für eine quadratische Zielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x + c$$

und bei Wahl der exakten Schrittweite σ_k sind beiden Versionen äquivalent, das heisst, das CG-Verfahren erzeugt die gleichen Iterierten.

Hausübung

Aufgabe H1 (Matrixnorm und Eigenwerte)

Sei $G \in \mathbf{R}^{n,n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm und

$$\|G\|_2 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|_2}{\|x\|_2}$$

die induzierte Matrixnorm (Spektralnorm). Es gelte mit $0 < \mu \leq \eta$

$$\mu \|x\|_2^2 \leq x^T G x \leq \eta \|x\|_2^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}^n.$$

Weisen Sie für alle $x \in \mathbf{R}^n$ die folgenden Ungleichungen nach:

$$\mu \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \eta,$$

$$\mu \|x\|_2^2 \leq \lambda_1 \|x\|_2^2 \leq x^T G x \leq \lambda_n \|x\|_2^2 \leq \eta \|x\|_2^2,$$

$$\frac{1}{\eta} \|x\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_n} \|x\|_2^2 \leq x^T G^{-1} x \leq \frac{1}{\lambda_1} \|x\|_2^2 \leq \frac{1}{\mu} \|x\|_2^2,$$

$$\|G\|_2 = \lambda_n \leq \eta, \quad \|G^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Aufgabe H2 (Unzulässige Suchrichtungen)

Wählt man Suchrichtungen, die nicht zulässig sind, da sie z.B. fast senkrecht zur Gradientenrichtung, also nahezu tangential zu den Isolinien der Zielfunktion, verlaufen, so kann es passieren, dass das Abstiegsverfahren nicht gegen einen stationären Punkt konvergiert. Untersuchen Sie dazu die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ für die Suchrichtungen

$$s_k = g_k^{\perp} - \frac{1}{2^{k+3}} g_k.$$

Hierbei sei $g_k = \nabla f(x_k)$ und $g_k^{\perp} : g_k^{\perp} \perp g_k$, so dass $\|s_k\| = \|g_k\|$.

Zeigen Sie, dass das Abstiegsverfahren mit diesen Suchrichtungen und zulässiger Schrittweitenwahl für keinen Startpunkt $x_0 \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ gegen den Minimalpunkt $\bar{x} = 0$ von f konvergiert und $\bar{x}$ auch kein Häufungspunkt von (x_k) ist.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 11. bzw. 13.11.2009 in der Übung.