Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/2010
30.10.2009

2. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Gleichungsnebenbedingung)

Wir betrachten eine Optimierungsaufgabe mit nichlinearer Zielfunktion und linearer Gleichungsnebenbedingung:

$$\text{(PLG)} \qquad \begin{cases} \min_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} & f(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b. \end{cases}$$

Hierbei ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$, und $b \in \mathbb{R}^m$.
Zeigen Sie: Ist $\bar{x}$ ein Minimum, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\nabla f(\bar{x}) + A^T\lambda = 0.$$

Benutzen Sie dafür die Variationsungleichung aus Satz 1.4.7 und die Beziehung $(\text{kern } A)^\perp = \text{Im } A^T$.

Aufgabe H2 (Projektion)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge und $P : \mathbb{R}^n \to C$ die Projektion auf C, d.h.

$$P(w) \in C, \quad \frac{1}{2}\|P(w) - w\|^2 = \min_{v\in C} \frac{1}{2}\|v - w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) P ist wohldefiniert.

b) Für beliebige $w, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$z = P(w) \quad \Leftrightarrow \quad z \in C, \quad (w - z)^\top(v - z) \leq 0, \quad \forall v \in C.$$

c) P ist nicht expansiv, d.h.

$$\|P(v) - P(w)\| \leq \|v - w\| \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Die Projektion ist allerdings nicht kontraktiv, wie man leicht sieht, wenn man in der obigen Ungleichung $v, w \in C$ wählt. Geben Sie ein weiteres Gegenbeispiel an, bei dem $v, w \notin C$ gilt.

d) P ist monoton, d.h.

$$(P(v) - P(w))^\top (v - w) \geq 0 \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

“ = “ gilt genau dann, wenn $P(v) = P(w)$.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 04.11.09 bzw. 06.11.09 in der Übung.