Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
23.10.2009

1. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvexe Funktionen)

Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine konvexe Menge und $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall, sei $g : K \to I$ (streng) konvex und $f : I \to \mathbf{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass die Komposition

$$f \circ g : K \to \mathbf{R}$$

(streng) konvex ist.

Aufgabe G2 (Konvexität und Extremwerte)

Zeigen Sie:
Sei $Z \subset \mathbf{R}^n$ konvex und $f : Z \to \mathbf{R}$ konvex. Dann gilt:

(a) *Jedes lokale Minimum von f auf Z ist auch globales Minimum.*

(b) *Die Lösungsmenge von*

$$\min_{x \in Z} f(x)$$

ist konvex.

(c) *Ist f streng konvex, so hat f auf Z höchstens ein lokales Minimum und dieses ist dann auch globales Minimum.*

Gilt Aussage a) auch für Maxima, d.h. ist jedes lokale Maximum auch globales Maximum?

Aufgabe G3 (Radial unbeschränkte Funktionen)

Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbf{R}^n$ die Niveaumenge $N_f(w)$ kompakt ist.

Aufgabe G4 (Konvexe Funktionen und Differenziarbarkeit)

Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine konvexe Menge und sei $f : K \to \mathbf{R}$ konvex und differenzierbar. Zeigen Sie, dass f das Supremum all seiner Tangenten ist, also

$$f(y) = \sup_{x \in K} \{f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)\} \quad \forall y \in K.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzieren im Mehrdimensionalen)

(a) Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Abbildungen $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ und $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ folgendes gilt:

$$\nabla(F(x)^T G(x)) = F'(x)^T G(x) + G'(x)^T F(x).$$

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Abbildung $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

mit $b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ und $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

(c) Sei f wie in Aufgabenteil b). Tritt bei einer Taylorentwicklung zweiter Ordnung von f in $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ ein Restglied auf?

Aufgabe H2 (Konvexität der Norm)

Sei $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbf{R}^n$ und $y \in \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \|x - y\|$ konvex, aber nicht strikt konvex auf $\mathbf{R}^n$ ist und dass die Niveaumengen von f kompakt sind.

Aufgabe H3 (Konvexität quadratischer Funktionen)

Zeigen: Ist H positiv definit, dann ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x$ streng konvex.

Aufgabe H4 (Freie Optimierung quadratischer Funktionen)

Schreiben Sie die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1 x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3$$

in der Form $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c$ mit symmetrischer Matrix $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Ist H positiv definit? Berechnen Sie das globale Minimum von f.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 28. bzw. 30.10.2009 in der Übung.