Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi, Cedric Sehrt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
03. und 05.02.2010

5. Aufgabenblatt des Rechnerpraktikums zur „Nichtlinearen Optimierung“

Aufgabe P8 (Penalty-Verfahren)

Programmieren Sie das Penalty-Verfahren aus Algorithmus 16 mit folgender Penalty-Funktion:

$$\begin{aligned} P_\rho^{(3)}(x) &= f(x) + \frac{\rho}{3}\left(\sum_{i=1}^{m}\big(\max\{0, c_i(x)\}\big)^3 + \sum_{i=1}^{p}|h_i(x)|^3\right) \\ &= f(x) + \frac{\rho}{3}(\|(c(x))_+\|_3^3 + \|h(x)\|_3^3). \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei das Newton-Verfahren aus Aufgabe P3 zur Lösung der Penalty-Probleme in jedem Schritt des Verfahrens mit der Abbruchbedingung $\|\nabla P_{\rho_k}^{(3)}(x)\| \le 10^{-4}$. Erhöhen Sie den Penalty-Parameter (in Schritt 3 des Penalty-Verfahrens) um den Faktor 10, also durch die Vorschrift $\rho_{k+1} = 10\rho_k$. Verwenden Sie für das äussere Verfahren – also das Penalty-Verfahren – die Abbruchbedingung $\|(c(x_k))_+\| + \|h(x_k)\| \le 10^{-4}$. Führen Sie als zusätzliches Abbruchkriterium eine maximale Anzahl an äusseren Iterationen ein.

Hinweis: Verwenden Sie globale Variablen für die Funktionsnamen der Zielfunktion f, der Nebenbedingungen c und h, sowie für den Penalty-Parameter ρ, um diese bei der Generierung der Penalty-Funktion benutzen zu können.

Testen Sie Ihr Verfahren anhand der folgenden Optimierungsprobleme:

(a)

$$\begin{cases} \min & 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \\ \text{u.d.N.} & x_2 + 3x_1 \le 0 \end{cases}$$

mit Startwerten innerhalb und ausserhalb des zulässigen Bereichs ($x_0 = (-1, 0.5)$ und $x_0 = (4, 5)$)

(b)

$$\begin{cases} \min & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{u.d.N.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \\ & 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \end{cases}$$

mit Startwert $x_0 = (3, 0.2, 3)$

(c)

$$\begin{cases} \min & (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{u.d.N.} & x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

mit den Startwerten $x_0 = (2, 2)$ und $x_0 = (-3, 0)$.

Variieren Sie dabei jeweils den Startwert ρ_0 und die Vergrößerung des Penalty-Parameters:

- Startwerte: $\rho_0 = 1, 100, 1e5$
- Vergrößerung von ρ_k: $\rho_{k+1} = 10\,\rho_k$, $\rho_{k+1} = 10\,\rho_k^2$, $\rho_{k+1} = 10\,\rho_k^3$

Wie verhält sich der Algorithmus und insbesondere das Newton-Verfahren in Abhängigkeit von ρ?

Plotten Sie die Penalty-Funktion für die Optimierungsaufgabe aus a) auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5, 5]$ für $\rho = 100, 10000, 1e6, 1e8$. Nutzen Sie dabei die Matlab-Routinen `meshgrid` und `surf`.

Bemerkung: Obwohl die quadratische Penalty-Funktion aus der Vorlesung nicht zweimal stetig diffbar ist, kann zur Lösung der bei quadratischer Penalisierung entstehenden Teilprobleme ebenfalls ein (modifiziertes) Newton-Verfahren verwendet werden. Hierbei handelt es sich um ein semi-glattes Newton-Verfahren, das superlinear konvergiert.