TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2009/10
30.11.09

Aufgaben zur Vorlesung
„Numerik stochastischer Prozesse“

13. Betrachten Sie einen n-dimensionalen Zufallsvektor X. Formulieren Sie ein Analogon zur Karhunen-Loève-Darstellung für X. Wie lautet der entsprechende Optimalitätssatz?

14. Betrachten Sie den Kovarianzkern

$$K\left((s^{(1)}, s^{(2)}), (t^{(1)}, t^{(2)})\right) = \left(1 + \min(s^{(1)}, t^{(1)})\right) \cdot \left(1 + \min(s^{(2)}, t^{(2)})\right)$$

auf $[0,1]^2 \times [0,1]^2$. Gegeben sei ein Gitter

$$T = \{u_1, \ldots, u_k\} \times \{v_1, \ldots, v_\ell\}$$

mit

$$0 = u_1 < \ldots < u_k = 1, \qquad 0 = v_1 < \ldots < v_\ell = 1.$$

Charakterisieren Sie den Spline-Raum

$$\mathrm{span}\{K(\cdot, t) : t \in T\}$$

und die zugehörigen Interpolationssplines.

15. Betrachten Sie einen stochastischen Prozeß $X = (X(t))_{t\in[0,1]}$, der

$$E(X(s) - X(t))^2 \leq c \cdot |s - t|^{2\beta}$$

für alle $s, t \in [0,1]$ mit Konstanten $c > 0$ und $0 < \beta \leq 1$ erfüllt. Sei X^n die stückweise lineare Interpolation von X an den äquidistanten Knoten $0, 1/n, \ldots, 1$. Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler $\left(E\|X - X^n\|_2^2\right)^{1/2}$.

16. Implementieren Sie das Euler- und das Milstein-Verfahren für skalare stochastische Differentialgleichungen. Führen Sie für äquidistante Diskretisierungen Vergleiche durch.