TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2009/10
16.11.09

Aufgaben zur Vorlesung
„Numerik stochastischer Prozesse"

9. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen und Annahmen aus Abschnitt II.5.

Sei X ein zentrierter Gauß-Prozeß, und bezeichne h^ω den K-Spline zu den Daten $\lambda_i(X_\cdot(\omega))$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, daß für jedes $t \in I$

$$E(X_t \,|\, \lambda_1(X_\cdot), \dots, \lambda_n(X_\cdot)) = h^\omega(t)$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt.

10. Gegeben sei ein Zufallsvektor X mit Werten in $\mathbb{R}^3$, der die Punkte

$$\pm(3, -1, 1), \;\pm(0, 2, 1), \;\pm(0, -2, -3)$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/6 annimmt. Betrachten Sie das Problem der linearen Rekonstruktion von X aus dem Datum $\lambda(X) = X_1 + X_2 - X_3$ bezüglich der Supremum-Norm.

a) Zeigen Sie, daß der entsprechende Spline-Algorithmus durch $\widetilde{X} = \lambda(X) \cdot (1, -1/3, -1/2)$ gegeben ist, und berechnen Sie seinen Fehler $e(\widetilde{X}) = \left(E\|X - \widetilde{X}\|_\infty^2\right)^{1/2}$.

b) Konstruieren Sie einen Algorithmus der Form $\widehat{X} = \lambda(X) \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}^3$, der $e(\widehat{X}) < e(\widetilde{X})$ erfüllt.

11. Seien $K_\nu : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ nichtnegativ definit für $\nu = 1, \dots, d$. Definiere

$$K\left((s^{(1)}, \dots, s^{(d)}), (t^{(1)}, \dots, t^{(d)})\right) = \prod_{\nu=1}^{d} K_\nu(s^{(\nu)}, t^{(\nu)}), \qquad s, t \in [0,1]^d.$$

a) Zeigen Sie, daß K nichtnegativ definit ist.

b) Betrachten Sie speziell

$$K_\nu(s^{(\nu)}, t^{(\nu)}) = 1 - \max(s^{(\nu)}, t^{(\nu)}).$$

(Zu welchem Prozeß gehört dieser Kern?) Sei X eine zentrierter Prozeß mit Kovarianzkern K. Berechnen Sie

$$d(t_1, \dots, t_n) := E\left(\int_{[0,1]^d} X_t\, dt - 1/n \sum_{i=1}^{n} X_{t_i}\right)^2$$

für $t_1, \dots, t_n \in [0,1]^d$.

12. Entwerfen und implementieren Sie ein Programm zur graphischen Darstellung von Interpolationssplines im Falle $I = [0,1]^d$, $d = 1, 2$. Untersuchen Sie experimentell die Kondition auftretender linearer Gleichungssysteme.

Ein Liste von Kovarianzkernen zum Testen und Experimentieren. In Klammern der Name des zugehörigen zentrierten Gauß-Prozesses bzw. des Kernes. Mit $\|\cdot\|$ sei die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

1. Im Fall $d = 1$:
   (a) $K(s,t) = 1/2 \cdot (|s|^{2\beta} + |t|^{2\beta} - |s-t|^{2\beta})$ für $0 < \beta < 1$
   (fraktale Brownsche Bewegung, Brownsche Bewegung für $\beta = 1/2$),
   (b) $K(s,t) = \int_0^{\min(s,t)} (s-u)^r \cdot (t-u)^r \, du/(r!)^2$ für $r \in \mathbb{N}$
   (r-fach intgrierte Brownsche Bewegung), vgl. Aufgabe 8,
   (c) $K(s,t) = \exp(-|s-t|)$
   (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß),
   (d) $K(s,t) = \exp(-(s-t)^2)$
   (Gauß-Kern).

2. Im Falle $d = 2$:
   (a) Tensorprodukte obiger Kerne, siehe Aufgabe 11,
   (Brownsches Blatt für Kerne aus 1.(a) mit $\beta = 1/2$),
   (b) $K(s,t) = 1/2 \cdot (\|s\|^{2\beta} + \|t\|^{2\beta} - \|s-t\|^{2\beta})$ für $0 < \beta < 1$
   (isotrope Brownsche Bewegung für $\beta = 1/2$),
   (c) $K(s,t) = 2/\Gamma(\nu) \cdot (h/2)^\nu \cdot K_\nu(h)$ für $h = \|s-t\|$
   und K_ν modifizierte Besselfunktion 2. Art mit $\nu > 0$.
   Speziell für $\nu = 1/2$: $K(s,t) = \exp(-\|s-t\|)$,
   (d) $K(s,t) = \exp(-\|s-t\|^2)$.