TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2009/10
16.11.09

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische partielle Differentialgleichungen"

1. Sei Q der Kovarianzoperator des Wiener-Maßes auf $U = L_2([0,1])$, siehe Aufgabe 2.3.

a) Charakterisieren Sie den Raum $Q(U)$.

b) Bestimmen Sie den zu Q assoziierten Hilbertraum $H(Q)$.

2. Sei Q der Kovarianzoperator eines zentrierten Gauß-Maßes μ auf einem separablen Hilbertraum U. Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aus Eigenvektoren von Q bestehende Orthonormalbasis von U, und bezeichne $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von Eigenwerten. Setze $K = \{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq 0\}$.

a) Zeigen Sie

$$H(Q) = \{u \in U : \sum_{k\in K} \langle u, e_k\rangle^2/\lambda_k < \infty \text{ und } \langle u, e_k\rangle = 0 \text{ für } k \notin K\}$$

sowie

$$\langle u, v\rangle_Q = \sum_{k\in K} \langle u, e_k\rangle \cdot \langle v, e_k\rangle/\lambda_k$$

für $u, v \in H(Q)$.

b) Gelte $|K| = \infty$. Zeigen Sie $\mu(H(Q)) = 0$.

3. Sei C^m der Raum der m-fach stetig differenzierbaren Funktionen. Zeigen Sie

$$C^m \subset H^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und

$$H^s \subset C^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und $s > m + 1/2$.