TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2009/10
29.10.09

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische partielle Differentialgleichungen“

1. Seien E ein separabler Banachraum und $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner bezeichne $\mathfrak{E}$ den Raum der einfachen $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{B}(E)$-meßbaren Funktionen.

a) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{E}$ bzgl. punktweiser Konvergenz dicht im Raum der $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{B}(E)$-meßbaren Funktionen liegt.

b) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{E}$ für jedes $p \in [1, \infty[$ dicht in $L_p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu; E)$ liegt.

2. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in einem separablen Hilbertraum, die Gauß-verteilt mit Erwartungswert null ist.

a) Zeigen Sie die Integrierbarkeit von $\exp(\alpha \|X\|^2)$ für geeignete Werte von $\alpha > 0$.

b) Zeigen Sie, daß $X \in L_p(U)$ für alle $p \in [1, \infty[$ gilt.

Fernique's Theorem präzisiert und verallgemeinert die Aussage a), siehe Bogachev (1998, Thm. 2.8.5).

3. Studieren Sie den Beweisteil 1.) für Proposition 2.1.10 in Prévôt, Röckner (2007).

4. Betrachten Sie einen separablen Hilbertraum U und einen symmetrischen nicht-negativ definiten Operator $Q \in L(U)$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die

$$Qu = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle u_n$$

für alle $u \in U$ erfüllt. Hinweis: $Q = Q^{1/2} Q^{1/2}$.

b) Zeigen Sie, daß Q der Kovarianzoperator eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathfrak{B}(U)$ ist.