# V Kompaktheit und Konvergenz im Raum der holomorphen Funktionen

Im ersten Abschnitts dieses Kapitels versehen wir den Vektorraum der auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen mit einer geeigneten Metrik und diskutieren grundlegende Eigenschaften wie Konvergenz und Kompaktheit in diesem metrischen Raum. Zentrales Resultat dieses Abschnitts ist der Satz von Montel, welcher besagt, dass man kompakte Mengen $K$ in dem unendlichdimensionalen (topologischen) Vektorraum $\mathcal{H}(U)$ analog zum Satz von Heine-Borel durch ihre Beschränktheit und Abgeschlossenheit charakterisieren kann.
Der anschließende Abschnitt über die Riemannsche Zeta-Funktion beschreibt eines der berühmtesten und größten offenen Probleme der gesamten heutigen Mathematik. Eine positive Beantwortung der sogenannten Riemannschen Vermutung hätte zahlreiche Konsequenzen, insbesondere in der Zahlentheorie.

## 1 Der Satz von Montel

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $F := \mathcal{H}(U)$ der Vektorraum aller auf $U$ holomorphen Funktionen. Für eine kompakte Menge $K \subset F$ definieren wir die Funktion $p_K : F \to \mathbb{R}$ durch

$$p_K(f) := \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Dann ist $p_K$ eine Halbnorm (vgl. Analysis II) auf $F$, d.h. $p_K$ besitzt für alle $f, g \in F$ die folgenden Eigenschaften:
i) $p_K(f) \geq 0$,
ii) $p_K(\lambda f) = |\lambda| p_K(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$,
iii) $p_K(f + g) \leq p_K(f) + p_K(g)$.
Die folgenden topologischen Begriffe sind für diesen Abschnitt zentral.

**1.1 Definition.** a) Eine Folge $(f_n) \subset F$ heißt *kompakt konvergent* gegen $f \in F$, wenn

$$\lim_{n \to \infty} p_K(f - f_n) = 0$$

für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt.
b) Eine Menge $V \subset F$ heißt *Umgebung von* $f \in F$, falls ein Kompaktum $K \subset U$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren, derart dass

$$V_{K,\varepsilon}(f) = \{g \in F : p_K(g-f) < \varepsilon\} \subset V$$

gilt.
c) Eine Menge $V \subset F$ heißt *offen*, falls für alle $f \in V$ die Menge $V$ eine Umgebung von $f$ ist. Eine Menge $A \subset F$ heißt *abgeschlossen*, falls $F \setminus A$ offen ist.
d) Ein System $\{V_i : i \in I\}$ von Teilmengen von $F$ heißt *Fundamentalsystem von Umgebungen von* $f \in F$, falls gilt:
i) jedes $V_i$ ist Umgebung von $f$,
ii) für jede Umgebung $V$ von $f$ existiert ein $i \in I$ mit $V_i \subset V$.

Die Menge aller so definierten offenen Mengen definiert dann eine Topologie auf $F$, welche *Topologie der kompakten Konvergenz* genannt wird. Zum Beispiel ist das System $\{V_{K,\varepsilon} : K \subset U \text{ kompakt}, \varepsilon > 0\}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $f \in F$. Diese Topologie besitzt ferner die folgenden Eigenschaften.

**1.2 Lemma.**
*a) $F$ ist Hausdorffsch, d.h. für alle $f, g \in F$ mit $f \neq g$ existieren Umgebungen $V_1$ von $f$ bzw. $V_2$ von $g$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.*
*b) $F$ ist metrisierbar, d.h. es existiert eine Metrik $d$ auf $F$, so dass für jedes $f \in F$ das System $\{g \in F : d(f,g) < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $f$ ist.*

*Beweis.* a) Nach Voraussetzung existiert ein Kompaktum $K \subset U$ mit $r := p_K(f-g) > 0$. Setzt man $V_1 := V_{K,\varepsilon}(f)$ und $V_2 := V_{K,\varepsilon}(g)$ mit $\varepsilon = r/2$, so folgt die Behauptung.
b) Durch eine geeignete Wahl von Rechtecken in $U$ können wir eine sogenannte Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U$ finden, d.h. eine Folge von kompakten Mengen $K_n$ in $U$ mit $K_n \subset \circ K_{n+1}$, derart dass für ein beliebiges Kompaktum $K \subset U$ für mindestens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ $K \subset K_{n_0}$ gilt (Übungsaufgabe!). Ist $(K_n)$ eine solche Ausschöpfungsfolge, und setzt man

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, p_{K_n}(f-g)\},$$

so ist $d$ eine Metrik auf $F$.

$\square$

Im Folgenden interessieren wir uns für die Vollständigkeit des Raumes $\mathcal{H}(U)$. Hierzu definieren wir zunächst den Begriff der Cauchyfolge in diesem Zusammenhang.

**1.3 Definition.** Eine Folge $(f_n) \subset F$ heißt *Cauchyfolge in* $F$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes Kompaktum $K \subset U$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$p_K(f_n - f_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_0$.

Es gilt dann das folgende Lemma.

**1.4 Lemma.** *Der Vektorraum $\mathcal{H}(U)$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathcal{H}(U)$ ist konvergent.*

*Beweis.* Es sei $(f_n)$ eine Cauchyfolge in $F$ und $z_0 \in U$. Dann ist $K := \{z_0\}$ kompakt und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| = p_K(f_n - f_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_0$. Daher ist $(f_n(z_0))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ existiert $f(z_0) := \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) \in \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Nach Definition der kompakten Konvergenz konvergiert die Folge $(f_n)$ auf jedem Kompaktum $K \subset U$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Der Satz von Weierstraß **??** impliziert, dass $f \in F$ gilt, und somit die Behauptung.

$\square$

Fassen wir alle Eigenschaften des Vektorraums $F$ und der zugehörigen Topologie zusammen, so gilt das folgende Resultat.

**1.5 Satz.** *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, so ist $\mathcal{H}(U)$ ein vollständiger, metrischer Raum.*

In der Sprache der Funktionalanalysis ist $F$ sogar ein komplexer *Fréchetraum* . Da in metrischen Räumen die Begriffe „kompakt“ und „folgenkompakt“ übereinstimmen, ist die folgende Definition natürlich.

**1.6 Definition.** a) Eine Menge $M \subset F$ heißt *kompakt*, falls jede Folge in $M$ eine in $M$ konvergente Teilfolge besitzt.
b) Eine Menge $M \subset F$ heißt *beschränkt*, falls $p_K(M) := \{p_K(f) : f \in M\} \subset \mathbb{R}$ für jedes Kompaktum $K \subset U$ beschränkt ist.

Das folgende bemerkenswerte Theorem von Montel besagt, dass man kompakte Mengen $K$ im unendlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{H}(U)$ analog zum Satz von Heine-Borel (vgl. Analysis I) durch ihre Beschränktheit und Abgeschlossenheit charakterisieren kann.

**1.7 Theorem.** (Satz von Montel).
*Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Der im Folgenden beschriebene Beweis des Satzes von Montel beruht auf dem, uns schon aus der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen" her bekannten Satz von Arzelà-Ascoli, welchen wir hier wiederum nur zitieren, aber nicht beweisen wollen.

**1.8 Satz.** (Satz von Arzelà-Ascoli).
*Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann ist eine Menge $\mathcal{F} \subset C(U, \mathbb{C})$ genau dann relativ kompakt, wenn gilt:*
*a) für jedes $z \in U$ ist $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt,*
*b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig in jedem Punkt $z_0 \in U$.*

Der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit ist hierbei wie in der Vorlesung gewöhnliche Differentialgleichungen definiert. Eine Menge $\mathcal{F} \subset C(U, \mathbb{C})$ heißt *gleichgradig stetig in* $z_0 \in U$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

gilt für alle $z \in U$ mit $|z - z_0| \leq \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$.

*Beweis.* Ist $\mathcal{F} \subset F = \mathcal{H}(U)$ kompakt, so ist $\mathcal{F}$ klarerweise abgeschlossen. Ferner, da $p_K : F \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $p_K(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge in $\mathbb{R}$ und somit beschränkt. Wir betrachten nun die umgekehrte Aussage. Da $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung beschränkt ist, ist klarerweise die Bedingung a) des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es nach dem Satz von Arzelà-Ascoli also zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ in jedem $z_0 \in U$ gleichgradig stetig ist. Hierzu $z_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren Konstanten $r, M > 0$, so dass $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ und $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \overline{B_r(z_0)}$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt. Wählt man $z \in U$ mit $|z - z_0| < r/2$, $f \in \mathcal{F}$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma f(\xi)\Big(\frac{1}{\xi - z_0} - \frac{1}{\xi - z}\Big)d\xi\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma f(\xi)\frac{z_0 - z}{(\xi - z_0)(\xi - z)}\Big| \\ &\leq \frac{2M}{r}|z_0 - z|. \end{aligned}$$

Wählen wir $\delta < \min\{\frac{r}{2}, \frac{r\varepsilon}{4M}\}$, so folgt

$$|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{F},$$

sofern nur $|z_0 - z| < \delta$ gilt.

□

**1.9 Bemerkung.** Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass der Satz von Montel im Reellen *falsch* ist. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Menge $\mathcal{F} := \{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ beschränkt, aber $\overline{\mathcal{F}}$ ist nicht kompakt, da wegen des Satzes von Arzelà-Ascoli die Funktionenmenge $\mathcal{F}$ nicht gleichgradig stetig ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Satz von Vitali, einer Folgerung des Satzes von Montel.

**1.10 Korollar.** (Satz von Vitali).
*Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine Menge, welche einen Häufungspunkt in $G$ besitzt. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ beschränkt und $(f_n) \subset \mathcal{F}$ eine Folge, welche punktweise auf $M$ konvergiert, so existiert $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ für alle $z \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Montel ist $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{H}(G)$ kompakt und es genügt daher zu zeigen, dass die Folge $(f_n)$ höchstens einen Häufungspunkt in $\mathcal{H}(G)$ besitzt. Seien aber $f$ und $g$ zwei Häufungspunkte der Folge $(f_n)$, so gilt $f|_M = g|_M$ und der Identitätssatz impliziert $f = g$.

□

# 2 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Die in diesem Abschnitt beschriebene Riemannsche Zeta-Funktion wurde seit ihrer Einführung im Jahre 1859 durch B. RIEMANN von Generationen von Mathematikern intensiv erforscht. Eines der berühmtesten ungelösten Probleme der gesamten Mathematik besteht darin, die Nullstellen der Zeta-Funktion zu bestimmen.
Wir beginnen mit der Definition der Zeta-Funktion.

Ist $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt $|k^z| = |e^{z \log k}| = e^{\mathrm{Re}\,(z) \log k}$ und daher gilt für $\mathrm{Re}\,(z) \geq 1+\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{n} |k^{-z}| \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-(1+\varepsilon)},$$

welches bedeutet, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ in $\mathcal{H}(U)$ mit $U = \{\mathrm{Re}\,(z) > 1\}$ lokal gleichmäßig und absolut gegen eine holomorphe Funktion $\zeta$ konvergiert.

**2.1 Definition.** Die *Riemannsche Zetafunktion* ist für $\mathrm{Re}\, z > 1$ definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

Eine weitere Funktion von Interesse in diesem Zusammenhang ist die schon in Analysis II eingeführte *Gamma-Funktion*, welche für $z \in \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{z}{n}\big)^{-1} e^{-z/n},$$

wobei die Konstante $\gamma$ so gewählt ist, dass $\Gamma(1) = 1$ gilt. Die Konstante $\gamma$ heißt *Eulersche Konstante* und kann zu

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \big[(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) - \log n\big]$$

bestimmt werden. Man kann zeigen, dass $\Gamma$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, welche nur einfache Pole in $z = 0, -1, -2, \ldots$ mit Residiuen

$$\mathrm{Res}_\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

besitzt. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ erfüllt die Gamma-Funktion die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und ferner gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0.$$

Insbesondere definiert $\Gamma$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ eine holomorphe Funktion. Weiter gilt

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi} \sin(\pi x) = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi} \big[2 \sin(\frac{\pi x}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2})\big], \quad -1 < x < 0. \tag{2.1}$$

Setzen wir $t = nu$, so folgt

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nt} t^{z-1} dt.$$

Summieren wir über diese Gleichung über alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nt} t^{z-1} dt. \tag{2.2}$$

Unser nächstes Ziel ist es, die obige Summation und Integration zu vertauschen. Hierzu ist das folgende Lemma nützlich, dessen Beweis wir dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

**2.2 Lemma.** *a) Es sei* $a > 1$ *und* $S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann existiert* $\delta \in (0,1)$, *so dass für alle* $z \in S$ *gilt*

$$\Big|\int_\alpha^\beta (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt\Big| < \varepsilon,$$

*sofern nur* $\delta > \beta > \alpha > 0$ *gilt.*
*b) Es sei* $A \in \mathbb{R}$ *und* $S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq A\}$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann existiert* $\delta > 1$, *so dass für alle* $z \in S$ *gilt*

$$\Big|\int_\alpha^\beta (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt\Big| < \varepsilon,$$

*sofern nur* $\beta > \alpha > \delta$ *gilt.*

**2.3 Korollar.** *a) Gilt* $1 < a < A < \infty$ *und* $S := \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq A\}$, *so konvergiert das Integral*

$$\int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$$

*gleichmäßig auf* $S$.
*b) Gilt* $A \in \mathbb{R}$ *und* $S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq A\}$, *so konvergiert das Integral*

$$\int_1^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$$

*gleichmäßig auf* $S$.

**2.4 Satz.** *Für* $\operatorname{Re} z > 1$ *gilt*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt.$$

*Beweis.* Nach Korollar 2.3 definiert das obige Integral eine holomorphe Funktion in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$. Nach dem Identitätssatz genügt es also die obige Gleichheit für $z = x > 1$ zu zeigen.
Nach Lemma 2.2 existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, so dass

$$\int_0^\alpha (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{und} \quad \int_\beta^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Ferner, da $\sum_{k=1}^n e^{-kt} \leq \sum_{k=1}^\infty e^{-kt} = (e^t - 1)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\alpha e^{-nt} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty \int_\beta^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Die Gleichung (2.2) liefert zusammen mit der Tatsache, dass $\sum e^{-nt}$ gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$ gegen $(e^t - 1)^{-1}$ konvergiert, die Beziehung

$$\Big|\zeta(x)\Gamma(x) - \int_0^\infty (e^t-1)^{-1}t^{x-1}dt\Big| \leq \varepsilon + \Big|\sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta e^{-nt}t^{x-1}dt - \int_\alpha^\beta (e^t-1)^{-1}t^{x-1}dt\Big| < \varepsilon.$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun den Definitionsbereich der Zeta-Funktion $\zeta$ zunächst auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$ und schließlich auf ganz $\mathbb{C}$ ausdehnen. Hierzu betrachten wir die Laurententwicklung der Funktion $z \mapsto (e^z - 1)^{-1}$, welche durch

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + h(z) \tag{2.3}$$

für eine in einer Umgebung $U$ von 0 holomorphen Funktion $h$ gegeben ist. Der Term $\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}$ ist somit auf $U$ beschränkt und das Integral

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}dt$$

konvergiert daher gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Daher gilt

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}dt + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt =: G(z). \tag{2.4}$$

Da der erste und der dritte Term auf der rechten Seite jeweils holomorphe Funktionen auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ darstellen, kann man $\zeta(z)$ für $\operatorname{Re} z > 0$ durch $\zeta(z) := \Gamma(z)^{-1}G(z)$ definieren. Damit ist $\zeta$ eine meromorphe Funktion in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ mit einem einfachen Pol in $z = 1$ mit Residuum $\operatorname{Res}_\zeta(1) = 1$.
Für $0 < \operatorname{Re} z < 1$ gilt

$$(z-1)^{-1} = -\int_1^\infty t^{z-2}dt.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (2.4) ein, so folgt

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big)t^{z-1}dt, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \tag{2.5}$$

Die Gleichung (2.3) impliziert weiter, dass eine Konstante $c$ existiert mit $\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \leq ct$ für alle $t \in (0, 1]$. Deshalb konvergiert das Integral

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big)t^{z-1}dt$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$. Ferner existiert eine Konstante $c$ mit $\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1} \leq \frac{c}{t}$ für alle $t \geq 1$; daher konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1} dt$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$. Setzt man diese Integrale in die Gleichung (2.5) ein, so folgt

(2.6)

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1} dt - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{z-1} dt =: G_1(z) - \frac{1}{2z},$$

für $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Da der erste und der dritte Term auf der rechten Seite jeweils holomorphe Funktionen auf $S_1 := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ darstellen, können wir $\zeta$ auf $S_1$ durch

$$\zeta(z) := \begin{cases} \frac{G_1(z)}{\Gamma(z)} - \frac{1}{2z\Gamma(z)}, & z \in S_1 \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & z = 0 \end{cases}$$

definieren. Wegen $\operatorname{Res}_\Gamma(0) = 1$ folgt aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, dass $\zeta$ eine holomorphe Funktion auf ganz $S_1$ ist. Kombinieren wir dies mit (2.4), so ist $\zeta(z)$ nun definiert für alle $z \in \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > -1\}$ und $\zeta$ besitzt in $z = 1$ einen einfachen Pol. Für $z \in S_0 := \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 0\}$ gilt

$$\int_1^\infty t^{z-1} dt = -\frac{1}{z}.$$

Setzt man dies in die Gleichung (2.6) ein, so folgt

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big) t^{z-1} dt, \qquad z \in S_0. \tag{2.7}$$

Benutzt man die Identitäten

$$\frac{1}{e^t-1} + \frac{1}{2} = \frac{i}{2}\cot(\frac{it}{2}) \quad \text{und} \quad \cot(\frac{it}{2}) = \frac{2}{it} - 4it\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{t^2+4n^2\pi^2},$$

so folgt

$$\Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\Big)\frac{1}{t} = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}.$$

Einsetzen in (2.7) und Vertauschen und Summation und Integration liefert

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= 2\int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}\Big) t^z dt \\ &= 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\int_0^\infty \frac{t^z}{t^2+1} dt, \quad z \in S_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ist $x \in \mathbb{R} \cap S_0$ so folgt durch die Substitution $s = t^2$

$$\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\pi \frac{1}{\cos}(\frac{\pi x}{2}); \tag{2.9}$$

Kombiniert man dies mit den Gleichungen (2.8), (2.9) und (2.1), so folgt der folgende Satz.

**2.5 Satz.** (Funktionalgleichung der Zeta-Funktion).
*Für alle* $z \in \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 0\}$ *gilt*

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin(\pi z/2). \tag{2.10}$$

Genau genommen haben wir bisher die obige Gleichheit nur für relle $x \in (0,1)$ gezeigt. Da beide Seiten der obigen Gleichung jedoch holomorphe Funktionen im Streifen $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$ darstellen, folgt die Funktionalgleichung für alle $z \in \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 0\}$ aus dem Identitätssatz.
Wir können dieses Argument noch wie folgt ausdehnen: die rechte Seite der Funktionalgleichung ist holomorph in der ganzen linken Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ und wir verwenden die Funktionalgleichung um $\zeta(z)$ für $z$ mit $\operatorname{Re} z < 0$ zu definieren. Somit gilt das folgende Theorem

**2.6 Theorem.** *Die so definierte Zeta-Funktion ist eine meromorphe Funktion auf ganz* $\mathbb{C}$ *mit einem einizigen Pol in* $z = 1$ *der Ordnung* 1 *und Residuum* $\operatorname{Res}_\zeta(1) = 1$. *Für* $z \neq 1$ *gilt die Funktionalgleichung* (2.10).

Da die Funktion $z \mapsto \Gamma(1-z)$ Pole in $z = 1, 2, \ldots$ besitzt und da $z \mapsto \zeta(z)$ holomorph in $z = 2, 3, \ldots$ ist, folgt aus der Funktionalgleichung

$$\zeta(1-z)\sin(\pi z/2) = 0, \qquad z = 2, 3, \ldots \tag{2.11}$$

Da die Pole von $\Gamma(1-z)$ in $z = 2, 3, \ldots$ einfach sind und da $\zeta(z) \neq 0$ für diese $z$ gilt, müssen alle Nullstellen von (2.11) einfach sein. Weiter, da $\sin(\pi z/2) \neq 0$ gilt für alle ungeraden $z \in \mathbb{Z}$, folgt $\zeta(1-z) = 0$ für alle $z = 3, 5, \ldots$. Dies bedeutet

$$\zeta(z) = 0 \quad \text{für alle} \quad z = -2, -4, -6, \ldots.$$

Mit ähnlicher Argumentation zeigen wir, dass $\zeta$ keine weiteren Nullstellen außerhalb des Streifens $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ besitzt.

**2.7 Definition.** Die Punkte $z = -2, -4, -6, \ldots$ heißen die *trivialen Nullstellen* der Zeta-Funktion; der Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ wird *kritischer Streifen* genannt.

Wir sind nun in der Lage eine der berühmtesten offenen Fragen der Mathematik zu formulieren.

**2.8. Die Riemannsche Vermutung.**
*Ist $z$ eine Nullstelle der Zeta-Funktion im kritischen Streifen, so gilt* $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

Es ist bekannt, dass $\zeta$ keine Nullstellen $z$ mit $\operatorname{Re} z = 1$ und somit via der Funktionalgleichung auch keine mit $\operatorname{Re} z = 0$ besitzt. Weiter weiß man, dass unendlich viele Nullstellen $z$ von $\zeta$ mit $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ existieren. Es ist jedoch unbekannt, ob Nullstellen $z$ von $\zeta$ im kritischen Streifen mit $\operatorname{Re} z \neq 1/2$ existieren.

Wir beschließen dieses Kapitel mit dem *Eulerschen Primzahlensatz.*

**2.9 Theorem.** (Eulerscher Primzahlensatz).
*Ist* $(p_n)$ *die Folge der Primzahlen und* $\operatorname{Re} z > 1$ *so gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big( \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \Big).$$

*Beweis.* Die geometrische Reihe impliziert, dass

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} p_n^{-jz}, \quad n \geq 1$$

gilt. Betrachten wir für $n \geq 1$ Produkte von Termen $(1 - p_k^{-z})^{-1}$ für $1 \leq k \leq n$, so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\prod_{k=1}^{n} \Big( \frac{1}{1 - p_k^{-z}} \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-z},$$

wobei in der rechten Summe nur über diejenigen $n_1, n_2, \ldots$ zu summieren ist, in deren (eindeutig bestimmte) Primfaktorenzerlegung lediglich die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vorkommen. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann die Behauptung.

□

**2.10 Bemerkungen.** a) Das obige Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \Big( \frac{1}{1-p_n^{-z}} \Big)$ heißt *Euler-Produkt.*
b) Die Darstellung der Zeta-Funktion als Euler-Produkt zeigt insbesondere dass $\zeta(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$.

**2.11 Bemerkung.** Der obige Satz von Euler zeigt insbesondere, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wäre dies nicht so, hätte das Euler-Produkt für $z \to 1$ einen endlichen Grenzwert, im Widerspruch dazu, dass $\zeta$ nach Theorem 2.6 in $z = 1$ einen Pol besitzt.

Hadamard und de la Vallée-Poussin fanden 1896 unabhängig voneinander den ersten Beweis des schon von Gauß vermuteten *Primzahlensatzes*, welcher besagt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p$ mit $p \leq x$. Der Beweis des Primzahlensatzes benutzt die logarithmische Ableitung $\frac{\zeta'}{\zeta}$ der Zeta-Funktion und basiert auf der Tatsache, dass diese Funktion abgesehen von einem Pol in $z = 1$ holomorph auf einer Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}$ ist. Letzteres ergibt sich aus dem schon oben erwähnten Resultat, dass die Zeta-Funktion auf der Geraden $\operatorname{Re} z = 1$ keine Nullstellen besitzt.