5 Mittelwerteigenschaft und harmonische Funktionen

Im vorigen Abschnitt hatten wir das Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen aus dem Satz über die Gebietstreue hergeleitet. Erstes Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass das Maximumsprinzip für eine größere Klasse von Funktionen gilt. Im zweiten Teil dieses Abschnitts untersuchen wir dann harmonische Funktionen, das sind Funktionen, für welche $\Delta u = 0$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gilt.

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_0 \in G$ und $B_r(z_0) \subset\subset G$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite heißt auch Mittelwert von f auf $\partial B_r(z_0)$. Die folgende Definition ist daher natürlich.

5.1 Definition. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gibt es zu jedem $z_0 \in G$ ein $R > 0$ mit*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \qquad \text{für alle } r \leq R,$$

so besitzt f auf G die Mittelwerteigenschaft.

5.2 Bemerkungen.
a) Wir haben schon gesehen, dasss holomorphe Funktionen die Mittelwerteigenschaft besitzen.
b) Genügen f und g der Mittelwerteigenschaft, so gilt dies auch für $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sowie für $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ und $\overline{f}$.

Das Maximumsprinzip lautet in dieser Situation wie folgt.

5.3 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche der Mittelwerteigenschaft genügt. Besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist f in einer Umgebung von z_0 konstant.*

Beweis. OBdA dürfen wir annehmen, dass $f(z_0)$ reell und $f(z_0) > 0$ gilt. Wähle $R > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} f(z_0) &\geq |f(z)|, \quad |z - z_0| \leq R \quad \text{und} \\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt, \quad r \leq R \end{aligned}$$

gilt. Definieren wir g weiter durch $g(z) := \operatorname{Re} f(z) - f(z_0)$, so besitzt nach Bemerkung 5.2.b) g ebenfalls die Mittelwerteigenschaft und es gilt

$$\begin{aligned} g(z) &\leq |f(z)| - f(z_0) \leq 0, \quad |z - z_0| \leq R, \\ g(z_0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Somit folgt

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})dt$$

und wegen (5.1) folgt $g(z_0 + re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Da $r \leq R$ beliebig gewählt werden konnte, gilt $g(z) \equiv 0$ für alle z mit $|z - z_0| \leq R$. Dies impliziert jedoch $f(z_0) = \operatorname{Re} f(z)$ und somit

$$|f(z)| \leq f(z_0) = \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)|, \quad |z - z_0| \leq R.$$

Es gilt also $f(z) = \operatorname{Re} f(z)$ und somit $f(z) = f(z_0)$ für alle z mit $|z - z_0| \leq R$.

□

5.4 Korollar. *Ist f in der Situation von Satz 5.3 das Gebiet G beschränkt und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, so nimmt $|f|$ ihr Maximum bezüglich $\overline{G}$ auf ∂G an.*

Im Folgenden studieren wir weiter sogenannte harmonische Funktionen und beginnen mit ihrer Definition.

5.5 Definition. Eine Funktion $u : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls u zweimal stetig differenzierbar ist und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$$

gilt für alle $(x, y) \in M$.

Ist insbesondere $u : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0,$$

welches besagt, dass holomorphe Funktionen harmonisch sind. Die Beziehung $\Delta \overline{u} = \overline{\Delta u}$ impliziert ferner, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen wiederum harmonisch sind. Wir fassen diese Überlegungen im folgenden Satz zusammen.

5.6 Satz. *Holomorphe Funktionen und ihre Real- bzw. Imaginärteile sind harmonische Funktionen.*

Gibt es noch weitere harmonische Funktionen? Eine Antwort hierauf gibt der folgende Satz.

5.7 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funtkion. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ derart, dass* $\operatorname{Re} f = u$ *gilt. Weiter gilt $f = u + ic$ für ein $c \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Definiere die Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ durch

$$h = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nach Voraussetzung ist h stetig differenzierbar. Darüber hinaus ist h auf G holomorph, da

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\Delta u = 0, \quad z \in G$$

gilt. Nach Satz 1.3 besitzt h eine Stammfunktion f auf G, d.h. es gilt $f'(z) = h(z)$ für alle $z \in G$. Somit gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$h(z) = f'(z) = 2\frac{\operatorname{Re} f(z)}{\partial z} = \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\partial x} - i\frac{\operatorname{Re} f(z)}{\partial y}$$

und es folgt, dass sich u und $\operatorname{Re} f$ nur um eine Konstante c unterscheiden. Setzen wir $g = f - c$, so gilt $\operatorname{Re} g = u$. Die zweite Aussage des Satzes folgt aus dem folgenden Lemma.

□

5.8 Lemma. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktion mit* $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ *auf G. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + ic$.*

Beweis. Übungsaufgabe.

5.9 Korollar. *Jede harmonische Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

Kombinieren wir Satz 5.7 mit Bemerkung 5.2a) und b), so folgt die folgende Aussage.

5.10 Satz. *Harmonische Funktionen besitzen die Mittelwerteigenschaft.*

Das Maximumsprinzip überträgt sich wegen Satz 5.3 auf die Situation von harmonischen Funktionen wie folgt.

5.11 Satz. (Maximumprinzip für harmonische Funktionen).
Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet.
i) Besitzt eine harmonische Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum (Minimum), so ist f konstant.
ii) Ist G zusätzlich beschränkt und $f : G \to \mathbb{C}$ harmonisch sowie auf $\overline{G}$ stetig, so nimmt f ihr Maximum bzw. ihr Minimum auf ∂G an.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch ein klassisches Problem der Analysis, das sogenannte *Dirichlet-Problem.* Dieses Problem lautet wie folgt: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und g eine auf ∂G stetige, reelle Funktion. Gesucht ist eine auf $\overline{G}$ stetige und in G harmonische Funktion mit $u|_{\partial G} = g$, d.h. also

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x \in G, \\ u &= g, \quad x \in \partial G. \end{aligned}$$

Im Folgenden zeigen wir, dass das Dirichletproblem auf dem Einheitskreis lösbar ist und dass es auf beschränkten Gebieten höchstens eine Lösung dieses Problems geben kann. Hierzu sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und f holomorph in einer Umgebung von $\overline{D}$. Nach der Cauchy Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D.$$

Setzen wir $\xi = e^{i\theta}$, so folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z}\, d\theta.$$

Wenden wir diese Darstellung auf die Funktion $\frac{f(z)}{1 - z\overline{z}}$ an, so folgt

$$\frac{f(z)}{1 - |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta}}{|1 - e^{-i\theta} z|^2} d\theta,$$

und somit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z|^2)}{|1 - e^{-i\theta} z|^2}\, f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

Die obige Darstellung des Funktionswertes als Integral über einen gewissen „Kern“, den sogeannten Poissonkern, führt auf folgende Definition.

5.12 Definition. Die Funktion

$$P : \partial D \times D \to \mathbb{R}, \quad P(e^{i\theta}, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

heißt *Poissonkern* des Einheitskreises.

Der Poissonkern hat dann die im folgenden Satz beschriebenen wichtigen Eigenschaften.

5.13 Satz. (Poissonsche Integralformel).
a) Ist f eine auf $\overline{D}$ stetige und in D harmonische Funktion, so gilt

$$f(z) = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) f(e^{i\theta}) d\theta.$$

b) Ist $g : \partial D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist f gegeben durch

$$f(z) = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) g(e^{i\theta}) d\theta$$

harmonisch in D.
c) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) d\theta = 1 \qquad \text{für alle } z \in D.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage b).
b) Für festes $\theta \in [0, 2\pi)$ ist $P(e^{i\theta}, \cdot)$ der Realteil der in D holomorphen Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta+z}}{e^{i\theta} - z}.$$

Somit ist $P(e^{i\theta,\cdot})$ harmonisch und differenzieren unter dem Integral liefert $\Delta f(z) = 0$ für alle $z \in D$.
a) Wir nehmen zunächst an, dass f in einer konvexen Umgebung U von $\overline{D}$ harmonisch ist. Nach Satz 5.7 ist f der Realteil einer auf U holomorphen Funktion F, für welche die Darstellung

$$F(z) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) P(e^{i\theta}, z) d\theta$$

gilt. Da P reellwertig ist, gilt diese Darstellung auch für $f = \operatorname{Re} F$.
Ist f wie in der Voraussetzung, so wählen wir eine Folge (r_n) mit $r_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ und betrachten

$$f_n(z) := f(r_n z), \qquad z \in \overline{D}, n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ harmonisch in einer Umgebung von $\overline{D}$ und (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $\overline{D}$ gegen f. Daher gilt

$$\int_0^{2\pi} f_n(e^{i\theta}) P(e^{i\theta}, z) d\theta \to \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P(e^{i\theta}, z) d\theta,$$

und also

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(e^{i\theta})P(e^{i\theta}, z)d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P(e^{i\theta}, z)d\theta.$$

c) Dies folgt aus Aussage a) angewandt auf die konstante Funktion $f \equiv 1$.

□

Die Poissonsche Darstellung liefert das folgende wichtige Resultat über das oben diskutierte Dirichletproblem.

5.14 Theorem. (Eindeutige Lösbarkeit des Dirichletproblems).
Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *und* $g : \partial D \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann existiert genau eine stetige Funktion* $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *mit*
a) $\Delta u(z) = 0$ *für alle* $z \in D$,
b) $u(z) = g(z)$ *für alle* $z \in \partial D$.
Die Funktion u *ist gegeben durch*

$$u(z) := \begin{cases} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})P(e^{i\theta}, z)d\theta, & z \in D, \\ g(z), & z \in \partial D. \end{cases} \tag{5.2}$$

Beweis. Zum Beweis der Existenz notieren wir, dass nach Satz 5.13b) die Funktion u gegeben durch (5.2) in D harmonisch ist. Den (etwas mühsamen) Nachweis der Stetigkeit von u auf $\overline{D}$ wollen wir an dieser Stelle nicht ausführen.
Nun zum Beweis der Eindeutigkeit von u. Hierzu seien u, v stetige Funktionen auf $\overline{D}$, harmonisch in D und es gelte $u = v = g$ auf ∂D. Dann ist $u - v$ stetig auf $\overline{D}$, harmonoisch in G und es gilt $u - v = 0$ auf ∂D. Das Maximumsprinzip besagt dann, dass die Funktion $u - v$ ihr Maximum auf ∂D annehmen muss. Daher gilt $u \equiv v$.

□