

3 Potenzreihenentwicklung

Im vorherigen Abschnitt haben wir mittels des Cauchyschen Integralsatzes ein überraschendes Resultat hergeleitet: eine holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar. Wir zeigen im Folgenden, dass holomorphe Funktionen sogar dadurch charakterisiert werden können, dass sie lokal in eine Potenzreihe der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickelbar sind. Die Koeffizienten a_n sind hierbei durch

$$a_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

für alle $n \geq 0$ und geeignetes $R > 0$ bestimmt. Viele klassische Sätze, wie etwa der Nullstellensatz, der Identitätssatz, der Satz von der Gebietstreue sowie das Maximumsprinzip folgen aus diesem Ansatz.

Potenzreihen, d.h. Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ haben wir bereits detailliert in Analysis I untersucht. Insbesondere zeigten wir das folgende Resultat.

Ist $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, so konvergiert P entweder absolut und lokal gleichmäßig auf ganz \mathbb{C} oder es existiert eine $r \in [0, \infty)$, so dass $P(z)$ für $|z| < r$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und P für $|z| > r$ divergiert. Diese Zahl r heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Falls $P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, so setzen wir $r = \infty$.

Wir erinnern weiter an das folgende Resultat der Analysis I. Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe wird durch die Cauchy-Hadamardsche Formel zu

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

bestimmt. Hierbei gilt die Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$. Die Menge $B_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ heißt *Konvergenzkreis* von $P(z)$.

3.1 Bemerkung. Die Menge aller Potenzreihen bildet eine kommutative Algebra. Die Menge aller konvergenten Potenzreihen ist eine Unter algebra der Algebra aller Potenzreihen.

Der erste Satz in diesem Abschnitt besagt, dass konvergente Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen sind. Genauer gilt der folgende Satz.

3.2 Satz. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f definiert durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine auf dem Konvergenzkreis $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ holomorphe Funktion. Ferner konvergiert $f(z)$ auf $B_r(0)$ absolut und lokal gleichmäßig und es gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Beweis. Wählen wir eine kompakte Menge $M \subset B_r(0)$, so gilt $|z| \leq \varrho$ für alle $z \in M$ für ein $\varrho < r$. Daher gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n < \infty$$

für alle $z \in M$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert gleichmäßig auf M . Nach dem Satz von Weierstraß, Satz 2.9, ist f als Grenzfunktion der Funktionenfolge $(\sum_{n=0}^N a_n z^n)_{N \in \mathbb{N}}$ holomorph. Ferner gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, da der Konvergenzradius der durch gliedweise Differentiation entstehenden Potenzreihe mindestens r ist. □

3.3 Satz. Es sei f eine holomorphe Funktion auf $B_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$, wobei $0 < \varrho \leq \infty$ gilt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $r \geq \varrho$, welche auf $B_\varrho(0)$ die Funktion f darstellt, d.h. es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in B_\varrho(0).$$

Ferner gilt für die Koeffizienten a_n der Potenzreihe

$$a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < R < \varrho.$$

Beweis. Es sei $0 < R < \varrho$ und $|z_0| < R$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ gilt dann $|\frac{z_0}{z}| < 1$ und somit konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}}\right) = \frac{1}{z - z_0}$$

gleichmäßig in z . Daher gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(z_0) &\stackrel{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z) z_0^n}{z^{n+1}} dz \\ &\stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0) \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \stackrel{\text{CIF}}{=} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

unabhängig von R . □

Kombinieren wir Satz 3.2 mit Satz 3.3, so ergibt sich die folgende Charakterisierung holomorpher Funktionen.

3.4 Theorem. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) f ist holomorph.

b) f ist lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, d.h. für alle $z_0 \in D$ existiert eine Umgebung $U \subset D$ von z_0 , derart dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U,$$

gilt.

Beweis. a) \Rightarrow b): Für $z_0 \in D$ setzen wir $w := z - z_0$. Dann ist g definiert durch $g(w) = f(z_0 + w)$ in einer Umgebung von 0 eine in w holomorphe Funktion. Nach Satz 3.3 existiert daher ein $r > 0$ mit $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ für $|w| < r$. Daher gilt

$$f(z) = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

b) \Rightarrow a): wird analog zum Beweis des Satzes 3.2 bewiesen. □

Wir wollen die im obigen Theorem gegebene Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen nun zur systematischen Untersuchung holomorpher Funktionen benutzen und beginnen mit einem Satz welcher besagt, dass sich die Nullstellen einer holomorphen Funktion nicht häufen können.

3.5 Korollar. (Nullstellen einer holomorphen Funktion können sich nicht häufen).

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existiert eine Umgebung U von z_0 , so dass entweder $f \equiv 0$ oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass diese Aussage in der reellen Theorie falsch ist! Die Funktion $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ist ein Gegenbeispiel hierfür.

Beweis. Nach Voraussetzung und Theorem 3.4 existiert eine Umgebung V von z_0 , derart dass f auf V die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in V$$

besitzt. Gilt $a_n = 0$ für alle n , so folgt $f|_V = 0$.

Andernfalls existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < k$, d.h. f besitzt dann die Darstellung

$$f(z) = (z - z_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}}_{=:g(z)}.$$

Nach Theorem 3.4 ist g auf V holomorph und es gilt $g(z_0) = a_k \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von g existiert eine Umgebung $U \subset V$ von z_0 mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt dann

$$f(z) = \underbrace{(z - z_0)^k}_{\neq 0} \underbrace{g(z)}_{\neq 0} \neq 0.$$

□

3.6 Korollar. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f \not\equiv 0$. Dann ist die Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\}) := \{z \in G : f(z) = 0\}$ diskret in G , d.h. $f^{-1}(\{0\})$ besitzt keinen Häufungspunkt in G .*

Betrachtet man zum Beispiel die Funktion f gegeben durch $f(z) = \sin(\frac{\pi}{z})$, so ist diese holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für die Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\})$ gilt $f^{-1}(\{0\}) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist 0 ein Häufungspunkt von $f^{-1}(\{0\})$, aber auch ein Randpunkt von $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis. Es sei M das Innere der Menge $f^{-1}(\{0\})$. Dann ist M offen und da $f \not\equiv 0$ nach Voraussetzung, gilt $M \neq G$. Sei $z_0 \in \partial M \cap G$. Da $f|_M = 0$ gilt, folgt $f^{(n)}|_M = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $z_0 \in \partial M \cap G$. Daher verschwinden alle Koeffizienten a_n in der zugehörigen Potenzreihe von f und es ist $f \equiv 0$ in einer Umgebung von z_0 . Daher folgt $z_0 \in M$. Somit liegt jeder Häufungspunkt von M schon in M und M ist daher abgeschlossen. Da zudem M offen, $M \neq G$ und G zusammenhängend ist, folgt $M = \emptyset$. Wegen Korollar 3.5 existiert also für jedes $w \in f^{-1}(\{0\})$ eine Umgebung $U \subset G$ von w mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U \setminus \{w\}$ und somit kann w kein Häufungspunkt sein.

□

3.7 Satz. (Identitätssatz). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und $M \subset G$ besitze mindestens einen Häufungspunkt in G . Gilt $f|_M = g|_M$, so folgt $f = g$.*

Beweis. Wir wenden Korollar 3.6 auf die Funktion $h := f - g$ an. Wäre $h \neq 0$, so wäre nach Korollar 3.6 $h^{-1}(\{0\})$ eine diskrete Menge im Widerspruch dazu, dass $f|_M = g|_M$ gilt und M nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in G besitzt. □

3.8 Satz. (Satz von der Gebietstreue). *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht konstante Funktion, so ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Da f stetig und G zusammenhängend ist, folgt aus Satz ?? der Analysis II, dass auch $f(G)$ zusammenhängend ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist.

Hierzu sei $w_0 \in f(G)$ und wir wählen ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w_0$. Wegen Korollar 3.6 existiert ein abgeschlossener Kreis $\overline{K}_r(z_0) \subset G$, in welchem $f(z) = w_0$ nur für z_0 gilt. Auf dem kompakten Kreisrand $\partial K_r(z_0)$ ist $|f(z) - w_0|$ strikt positiv, d.h. es gilt $|f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon > 0$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ und $|z - z_0| = r$. Wir zeigen, dass $f(G)$ eine Umgebung $U_\varepsilon(w_0)$ enthält. Hierzu beobachten wir zunächst, dass für $|w - w_0| < \varepsilon$ und $|z - z_0| = r$

$$|f(z) - w_0| \geq |f(z) - w| - |w - w_0| \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon$$

gilt. Andererseits gilt für $z = z_0$ jedoch $|f(z_0) - w| = |w - w_0| < \varepsilon$. Daher besitzt $f - w$ eine Nullstelle in $K_r(z_0)$, d.h. es existiert ein $z \in K_r(z_0)$ mit $f(z) = w$. Dies zeigen wir durch den folgenden Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass $f - w$ in $\overline{B}_r(z_0)$ keine Nullstelle besitzt. Dann ist $g := \frac{1}{f-w}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{K}_r(z_0)$ und nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$|g(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{(z-z_0)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{r} \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|.$$

Also gilt

$$\frac{1}{|f(z_0) - w|} \leq \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|}$$

und somit

$$|f(z_0) - w| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|.$$

Widerspruch! □

3.9 Satz. (Maximumsprinzip). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Besitzt $|f|$ ein lokales Maximum in $z_0 \in G$, so ist f konstant.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht konstant sei. Aus dem Identitätssatz 3.7 folgt, dass $f|_U$ nicht konstant ist auf allen offenen, zusammenhängenden Umgebungen U eines Punktes $z_0 \in G$. Ferner ist $f(U)$ offen nach dem Satz über die Gebietstreue 3.8. Daher ist $f(z_0)$ ein innerer Punkt von $f(U)$ und somit ist $f(z_0)$ kein lokales Maximum von $|f|$. Widerspruch!

□

3.10 Korollar. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ sei zudem stetig. Dann nimmt die Funktion $|f|$ ihr Maximum auf ∂G an, d.h. es gilt*

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)|, \quad z \in \overline{G}.$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Maximumsprinzip, Satz 3.9.

3.11 Korollar. *Es sei G ein Gebiet, $K \subset G$ eine kompakte Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht konstante Funktion. Dann gilt*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| < \sup_{z \in G \setminus K} |f(z)|.$$

Beweis. Wir nehmen wiederum an, die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $z_0 \in K$ mit $|f(z_0)| = \sup_{z \in K} |f(z)| \geq \sup_{z \in G \setminus K} |f(z)|$. Die Funktion $|f|$ nimmt daher ihr Maximum in z_0 an im Widerspruch zum obigen Maximumsprinzip, Satz 3.9.

□

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Folgerung aus dem Maximumsprinzip. Das sogenannte Schwarzsche Lemma wird später bei der Bestimmung gewisser Automorphismengruppen von Wichtigkeit sein.

3.12 Satz. (Schwarzsches Lemma). *Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Dann gilt*

a) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$ und

b) $|f'(0)| \leq 1$.

Ferner gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $|f'(0)| = 1$ und genau dann, wenn $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt.

Den Beweis dieser Aussage überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.