II Holomorphe Funktionen

In diesem Kapitel entwickeln wir die grundlegende Theorie der holomorphen Funktionen. Zentral hierfür ist die Cauchysche Integraldarstellung für holomorphe Funktionen f der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D$$

auf geeigenten Gebieten $D \subset \mathbb{C}$. Diese Darstellung beruht ihrerseits auf dem Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete, d.h. auf der uns bereits bekannten Tatsache, dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ gilt für alle auf einem konvexen Gebiet G holomorphe Funktionen f und einen geschlossenen Integrationsweg γ in G.
Die obige Darstellung hat viele Konsequenzen: wir zeigen zunächst, dass eine holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist und erhalten als weitere Folgerung den klassischen Satz von Liouville. Letzterer erlaubt es uns insbesondere einen einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu geben. Weitergehend werden wir sehen, dass holomorphe Funktionen dadurch charakterisiert werden können, dass sie lokal in Potenzreihen der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelbar sind. Die Koeffizienten a_n sind hierbei durch

$$a_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bestimmt. Viele klassische Sätze, wie etwa der Nullstellensatz, der Identitätssatz, der Satz von der Gebietstreue sowie das Maximumsprinzip folgen aus diesem Ansatz.
Eine Diskussion der elementaren Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen (Exponentialfunktion, Logarithmus, Potenz, Wurzel) beschließt dieses Kapitel.

1 Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete

Der Cauchysche Integralsatz, welcher grob gesprochen besagt, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Integrationsweg verschwindet, ist von grundlegender Bedeteung für die Funktionentheorie. Unser Zugang zu diesem Theorem beruht auf dem sogenannten Lemma von Goursat und Resultaten über Stammfunktionen holomorpher Funktionen aus dem vorherigen Abschnitt.

Wir beginnen mit dem Lemma von Goursat.

1.1 Satz. (Lemma von Goursat). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir zerlegen $\triangle$ in 4 Teildreiecke,

die durch die Seitenmitten von $\triangle$ gebildet werden. Dann gilt

$$\Big|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\Big| = \Big|\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz + \int_{\partial\triangle_2} f(z)dz + \int_{\partial\triangle_3} f(z)dz + \int_{\partial\triangle_4} f(z)dz\Big| \leq 4 \max_{j=1,\dots,4} \Big|\int_{\partial\triangle_j} f(z)dz\Big|.$$

Das obige Maximum werde oBdA im Dreieck $\triangle_1$ angenommen. Wir wenden nun das Verfahren auf $\triangle_1$ an und erhalten

$$\Big|\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz| \leq 4 \max_{j=1,\dots,4} |\int_{\partial\triangle_j^2} f(z)dz\Big|$$

mit 4 Teildreiecken $\triangle_j^2$, $j = 1, \dots, 4$. Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir eine Folge von Dreiecken $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\Big|\int_{\partial\triangle} f(z)dz| \leq 4^n \Big|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\Big|.$$

Für die Summe der Seitenlängen gilt

$$|\partial\triangle_n| = \frac{1}{2}|\partial\triangle_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|\partial\triangle|.$$

Da die Dreiecke $\triangle_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt sind, existiert ein $z_0 \in \triangle$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \{z_0\}$. Ferner ist f nach Voraussetzung in z_0 holomorph und somit gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)[f'(z_0) + g(z)]$$

für eine stetige Funktion g mit $g(z_0) = 0$. Weiter besitzt die lineare Funktion $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ eine Stammfunktion und daher gilt nach Korollar I.3.9

$$\int_{\partial\triangle_n} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)dz = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\partial\triangle_n} f(z)dz\Big| &= \Big|\int\limits_{\partial\triangle_n} (z - z_0)g(z)dz\Big| \\
&\leq |\partial\triangle_n| \max_{z\in\partial\triangle_n} |(z - z_0)||g(z)| \\
&\leq |\partial\triangle_n|^2 \max_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)|.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\Big|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\Big| \leq 4^n \Big|\int\limits_{\partial\triangle_n} f(z)dz\Big| \leq 4^n\ |\partial\triangle_n|^2 \max_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)| \leq |\partial\triangle|^2 \max_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)|.$$

Da $g(z_0) = 0$ ist, konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung für $z \to z_0$ gegen 0.

□

Es wird sich im Folgenden als nützlich erweisen, das obige Lemma von Goursat auf solche Situation zu verallgemeinern, in denen f in einem Punkt $z_0 \in G$ nicht mehr holomorph ist.

1.2 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck und $z_0 \in \triangle$. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in $G \setminus \{z_0\}$ und stetig in z_0, so gilt*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in drei Fälle.
Fall 1: z_0 sei ein Eckpunkt von $\triangle$.
Wir zerlegen $\triangle$ wie im Bild

in 3 Teildreiecke $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$. Nach dem Lemma von Goursat 1.1 gilt dann

$$\int_{\partial\triangle_2} f(z)dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)dz = 0.$$

Also folgt $|\int_{\partial\triangle} f(z)dz| = |\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz|$ und somit

$$\Big|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\Big| \leq |\partial\triangle_1| \max_{z\in\partial\triangle_1} |f(z)|,$$

also

$$\lim_{z_1\to z_0} \Big|\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz\Big| = 0.$$

Fall 2: z_0 liege auf einer Seite von $\triangle$.
Zerlegt man $\triangle$ wie im Bild

so folgt wegen der Ergebnisse aus Fall 1

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)dz + \int_{\partial\triangle_2} f(z)dz = 0.$$

Fall 3: z_0 liege im Inneren von $\triangle$.
In disem Fall zerlegen wir $\triangle$ wie im Bild

und erhalten mit den Ergebnissen aus Fall 2

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)dz + \int_{\partial\triangle_2} f(z)dz = 0.$$

□

Verbinden wir die Aussage diesen Satzes mit dem im vorigen Abschnitt gegebenen Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion, so erhalten wir folgendes Resultat.

1.3 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche bis auf eventuelle Ausnahme eines Punktes auf G holomorph ist. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G.*

Die folgende Aussage ist ein unmittelbare Konsequenz aus dem obigen Satz 1.3 und den Resultaten aus Abschnitt I.3.

1.4 Theorem. (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche mit eventueller Ausnahme* *eines Punktes holomorph auf G ist. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma \subset G$*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Der vorherige Satz 1.3 impliziert, dass f eine Stammfunktion auf G besitzt. Nach Korollar I.3.9 verschwinden alle Integrale über f über geschlossene Integrationswege und das Theorem ist somit schon bewiesen.

$\square$

2 Die Cauchysche Integralformel

Ausgehend vom Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete wenden wir uns im Folgenden einer Integraldarstellung holomorpher Funktionen zu. Diese Darstellung, die sogenannte Cauchysche Integralformel der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ z \in D,$$

ist für den weiteren Aufbau der Funktionentheorie von fundamentaler Bedeutung. Sie impliziert unter anderem, dass holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar sind und dass auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen nicht beschränkt sein können, es sei denn, sie sind konstant. Dies ist die Aussage des klassischen Satzes von Liouville. Als Folgerung dieses Satzes geben wir anschließend einen einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Wir beginnen mit einem Lemma über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentation.

2.1 Lemma. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein Integrationsweg und $f : Sp(\gamma) \times D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Ferner sei $f(\xi, \cdot)$ für jedes $\xi \in Sp(\gamma)$ nach z komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung $f_z(\xi, \cdot)$ und F sei gegeben durch $F(z) := \int_\gamma f(\xi, z) d\xi$. Dann ist F auf D holomorph und es gilt*

$$F'(z) = \int_\gamma f_z(\xi, z) d\xi.$$

Beweis. Wir erinnern an die analoge Situation aus der Analysis II, d.h. es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \text{Sp}\ (\gamma) \times D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche stetig partiell differenzierbar nach x_i für $i = 1, 2$ ist. Setzt man

$$F(x) := \int_\gamma f(\xi, x) d\xi,$$

so ist F stetig partiell nach x_i differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi, x) d\xi.$$

Somit folgt die Behauptung, da $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ gilt.

□

Wir sind nun in der Lage die folgende Cauchysche Integralformel herzuleiten und zu beweisen.

2.2 Theorem. (Cauchysche Integralformel).
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $D := B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset G$ für ein $z_0 \in G$ und $r > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D.$$

Beweis. Es sei $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ eine konvexe Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$ derart, dass $B_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ gilt. Für $z \in D = B_r(z_0)$ betrachte auf $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ die Funktion g definiert durch

$$g(\xi) := \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z. \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf $B_{r+\epsilon}(z_0)$ und auch holomorph auf $B_{r+\varepsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$. Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete, Theorem 1.4, impliziert dann

$$0 = \int\limits_{\partial D} g(\xi) d\xi = \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \underbrace{\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\xi - z} d\xi}_{\overset{!}{=} 2\pi i}.$$

Setzt man für $z \in D$, $h(z) := \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z} d\xi$, so ist h auf D holomorph und es gilt

$$h'(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{(\xi - z)^2} d\xi = 0,$$

aufgrund von Lemma 2.1 und da die Funktion $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}^2$ eine Stammfunktion besitzt. Daher ist h auf D konstant und wir bestimmen den Wert der Konstanten nach Beispiel I.3.3 a) zu

$$h(z) = h(z_0) = \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z_0} d\xi = 2\pi i.$$

Der Satz ist somit bewiesen.

□

Das folgende Ergenbnis ist auf den ersten Blick ziemlich überraschend.

2.3 Korollar. *Eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar und jede ihre Ableitungen ist wiederum holomorph.*

Beweis. In der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D$$

ist der Integrand stetig nach z differenzierbar. Somit dürfen wir nach Lemma 2.1 Differentation und Integration vertauschen und erhalten somit

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad z \in D.$$

Das rechts stehende Integral ist als Integral einer holomorphen Funktionen wiederum eine in z holomorphe Funktion. Ferner, da jedes $z \in G$ in einer Kreisscheibe D gewählt werden kann, gilt die obige Darstellung für $f'(z)$ für alle $z \in G$. Durch Iterieren des obigen Arguments erhalten wir schließlich die Behauptung.

□

Das obige Korollar 2.3 zeigt insbesondere wie stark sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden! Aus der Analysis I wissen wir, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht einmal stetig sein muss.

Differenzieren wir eine holomorphe Funktion f n-mal, so impliziert die Cauchysche Integralformel die folgende Darstellung für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f. Im Folgenden schreiben wir $D \subset\subset G$ für zwei offene Mengen $D, G \subset \mathbb{C}$, falls $\overline{D}$ kompakt ist und $\overline{D} \subset G$ gilt. In diesem Fall heißt D *kompakt offen* in G.

2.4 Satz. (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es gelte $D \subset\subset G$ für eine offene Kreisscheibe D. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad z \in D.$$

Als weitere Folgerung erhalten wir den Satz von Morera, welcher in gewisser Weise eine Umkehrung des Lemmas von Goursat darstellt.

2.5 Korollar. (Satz von Morera). *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $\int_{\partial \triangle} f(z) dz = 0$ *für alle abgeschlossenen Dreiecke $\triangle$ in G.*

b) f ist holomorph auf G.

Beweis. Die Aussage b)⇒a) wurde bereits in Satz 1.1 bewiesen.
a)⇒b): Diese Aussage haben wir ebenfalls schon in Satz I.3.11 bewiesen unter der zusätzlichen Annahme, dass G konvex sei. Falls G nicht konvex ist, so besitzt jedes $z \in G$ jedoch eine konvexe in G enthaltene Umgebung U. Nach Satz I.3.11 besitzt f daher eine lokale Stammfunktion, d.h. es gilt $F' = f$ in U. Wir folgern aus Korollar 2.3 weiter, dass f holomorph ist.

□

2.6 Korollar. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ für ein $r > 0$ und ein $z_0 \in D$, sowie $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.*
Gilt $\left|f(z)\right| \leq M$ für alle $z \in D$, so folgt

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die Cauchysche Integralformel besagt, dass

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für jedes ϱ mit $0 < \varrho < r$ gilt. Daher gilt

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}(2\pi\varrho)\frac{M}{\varrho^{n+1}} = \frac{n!M}{\varrho^n}, \quad 0 < \varrho < r.$$

Für $\varrho \to r$ folgt die Behauptung.

□

2.7 Korollar. (Satz von Liouville).
Jede beschränkte holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis. Es gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt nach Korollar 2.6

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{M}{r} \quad \text{für alle } r > 0,$$

was $|f'(z)| = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit $f \equiv \mathit{const}$ impliziert.

□

Der Satz von Liouville hat viele Anwendungen in der Mathematik. Wir wollen mit seiner Hilfe hier einen einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben.

2.8 Satz. (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes Polynom p vom Grade $n \geq 1$ über $\mathbb{C}$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheit gezählt).

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, dass p mindestens eine Nullstelle besitzt. Hierzu sei

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass p keine Nullstelle besitzt, d.h. dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

In diesem Fall ist $f = \frac{1}{p}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Wir zeigen, dass f beschränkt ist. Der Satz von Liouville impliziert dann, dass f konstant sein muss im Widerspruch zur Voraussetzung.
Setzt man $r := \max_{0\leq k\leq n}(2n|\frac{a_k}{a_n}|)$, so ist $r > 1$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ und $k < n$ gilt dann

$$\left|\frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right| \leq \frac{r}{2n} r^{k-n} = \frac{r^{k-n+1}}{2n} \leq \frac{1}{2n},$$

und somit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$

$$|p(z)| = \left|a_n z^n (1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n})\right| \geq |a_n| r^n \Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2}|a_n| r^n =: M.$$

Daher gilt $|f(z)| \leq \frac{1}{M}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Ferner gilt $|f(z)| \leq \tilde{M}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$ für eine $\tilde{M} \geq 0$, da f stetig ist auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r$. Daher ist f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und der Satz von Liouville impliziert einen Widerspruch.
b) Nach a) besitzt p mindestens eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Somit ist $p(z) = (z - \lambda_1)p_1(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei p_1 ein Polynom vom Grade $n - 1$ ist. Gilt $n - 1 > 0$, so wenden wir wiederum a) an und erhalten iterativ n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen von p.

□

Im Folgenden betrachten wir eine Folge (f_n) von holomorphen Funktionen, welche gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und interessieren uns wie schon in der Analysis I für Eigenschaften dieser Grenzfunktion. Eine Frage in diesem Zusammenhang ist natürlich die Frage nach der Holomorphie der Grenzfunktion.

Wir erinnern zunächst an die Begriffe der punktweisen, gleichmäßigen und lokal gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge. Hierzu sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf G. Dann heißt

a) (f_n) *punktweise konvergent* gegen $f : G \to \mathbb{C}$, falls für alle $z \in G$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$.

b) (f_n) *gleichmäßig auf G konvergent* gegen $f : G \to \mathbb{C}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ exisitiert, derart dass $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ und alle $z \in G$ gilt.

c) (f_n) *lokal gleichmäßig konvergent* auf G gegen $f : G \to \mathbb{C}$, falls für jedes Kompaktum $K \subset G$ die Folge $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert, bzw. falls für jedes $z_0 \in G$ eine Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ existiert, so dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

2.9 Satz. (Satz von Weierstraß).
Es sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen, welche lokal gleichmäßig auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f holomorph und (f_n') konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.

Wir sehen, dass anders als in der reellen Analysis sich Differentiation und Grenzübergang vertauschen lassen!

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f holomorph ist und notieren vorweg, dass f als lokal gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen wiederum stetig ist (vgl. Satz ?? aus Analysis I). Für ein Dreieck $\triangle \subset G$ gilt dann aufgrund von Satz ?? aus der Analysis I und wegen des Lemmas von Goursat, Satz 1.1,

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz \overset{\text{AnaI}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \overset{\text{Satz1.1}}{=} 0.$$

Der Satz von Morera, Korollar 2.5, impliziert, dass f auf G holomorph ist.
Es sei $B_r(z_0) \subset\subset G$ ein Kreis um $z_0 \in G$ mit Radius r und $\varepsilon > 0$. Wir wenden die Cauchysche Integralformel für $z \in B_{r/2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \frac{r}{2}\}$ auf die Funktion $f - f_n$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \left|f_n'(z) - f'(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z| = r} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{4}{r^2} \max_{|\xi - z| = r} \left|f_n(\xi) - f(\xi)\right|. \end{aligned}$$

Wählt man nun $N_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\max\limits_{|\xi - z| = r} |f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon \frac{r}{4}$ für alle $n \geq N_0$ gilt, so folgt

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_0.$$

□