3 Kurvenintegrale

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Erinnerung an Kurvenintegrale und Wege aus der Analysis II. Genauer gesagt, heißt

a) eine stetige Abb. $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ ein *Weg* mit dem *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ sowie dem *Endpunkt* $\gamma(b)$.

b) Eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ heißt *Integrationsweg.*

c) Gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, so heißt γ ein *glatter* Weg.

d) Der Weg γ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

e) $\gamma([a,b]) =: \mathrm{Spur}(\gamma)$ heißt *Spur* von γ.

3.1 Beispiele.
a) Setzt man $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ für ein $r > 0$, so ist γ ein geschlossener und glatter Weg. Weiter gilt $\mathrm{Spur}\ (\gamma) = \partial B(0,r)$. Dies ist klar, da $\gamma'(t) = ire^{it} \neq 0$ für alle $t \geq 0$ gilt.
b) Nach Satz ?? aus der Analysis II wird die Länge $L(\gamma)$ des Wegs $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bestimmt durch

$$L(\gamma) = \int_a^b [(\mathrm{Re}\,\gamma'(t))^2 + (\mathrm{Im}\,\gamma'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun bereit für die Definition des Kurvenintegrals.

3.2 Definition. (Kurvenintegral).
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f :\ \mathrm{Spur}\ \gamma \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt.$$

das *Integral von f entlang der Kurve γ.*

Wir notieren, dass das obige Integral wohldefiniert ist, da der Integrand eine stückweise stetige Funktion ist.

3.3 Beispiele.
a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachte die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$. Dann gilt nach Definition und Beispiel 3.1.a)

$$\int_{\partial B(0,r)} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

b) Betrachtet man die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,1)} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{int} ie^{it} dt &= i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\
&= \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}|_0^{2\pi}, & n \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

c) Analog zeigt man, dass

$$\int_{\partial B(0,1)} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

gilt.

Die folgenden Rechenregeln für das Kurvenintegral folgen direkt aus der Definition des Kurvenintegrals. Die Beweise hierfür werden dem Leser daher als Übungsaufgabe überlassen.

3.4 Lemma. (Rechenreglen für Kurvenintegrale).
Für einen Integrtationsweg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und stetige Funktionen $f, g :$ Spur $\gamma \to \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen.

a) $\int_\gamma (f + g)(z) dz = \int_\gamma f(z) dz + \int_\gamma g(z) dz.$

b) $\int_\gamma cf(z) dz = c \int_\gamma f(z) dz$ *für jedes* $c \in \mathbb{C}$.

c) $| \int_\gamma f(z) dz| \leq ML(\gamma)$ *mit* $M = \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$.

Im Folgenden untersuchen wir den Begriff der Parametertransformation und betrachten zunächst die folgende Definition.

3.5 Definition. (Parametertransformation).
a) Zwei glatte Wege $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ gehen durch eine *Parametertransformation* auseinander hervor, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ existiert mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.
b) Weiter heißt eine Parametertransformation *orientierungserhaltend*, falls
$\varphi(a_1) = a_2 \Leftrightarrow \varphi(b_1) = b_2 \Leftrightarrow \varphi' > 0$ gilt, bzw.
c) *orientierungsumkehrend*, falls
$\varphi(a_1) = b_2 \Leftrightarrow \varphi(b_1) = a_2 \Leftrightarrow \varphi' < 0$ gilt.

3.6 Lemma. *Es seien γ_1, γ_2 zwei Integrationswege, welche durch Parametertransformation auseinander hervorgehen und f : Spur $\gamma_1 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion Dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

wobei $\varepsilon = 1$ für eine orientungserhaltende bzw. $\varepsilon = -1$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation gilt.

Den Beweis überlassen wir wiederum dem Leser als Übungsaufgabe.

Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung des Hauptsatzes der reellen Differential- und Integralrechnung auf Kurvenintegrale in der komplexen Ebene. Hierzu ist der Begriff der Stammfunktion von wesentlicher Bedeutung und wir führen diesen zunächst in der folgenden Definition ein.

3.7 Definition. (Stammfunktion).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
a) Eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls F auf D holomorph ist und falls $F' = f$ gilt.
b) Die Funktion f besitzt eine *lokale Stammfunktion auf D*, falls für jedes $x \in D$ eine offene Umgebung $U_x \subset D$ von x existiert, so dass $f_{|U_x}$ eine Stammfunktion besitzt.

In Analogie zur reellen Situation lassen sich Kurvenintegrale bei Kenntnis einer Stammfunktion leicht berechnen.

3.8 Satz. *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

für alle Integrationswege γ in D von z_0 nach z_1.

Beweis. Es sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ derart, dass $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F \circ \gamma)'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} (F \circ \gamma)(t_j) - (F \circ \gamma)(t_{j-1}) = F(z_1) - F(z_0)
\end{aligned}$$

□

Für geschlossene Integrationswege gilt das folgende Korollar.

3.9 Korollar. *Ist in der Situation von Satz 3.8 der Weg γ geschlossen, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

In diesem Zusammenhang ist es natürlich nach der Umkehrung von Korollar 3.9 zu fragen: Besitzt f eine Stammfunktion, falls $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege gilt? Der folgende Satz bejaht diese Frage unter der Voraussetzung, dass D zusätzlich zusammenhängend, also ein Gebiet ist.

3.10 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gilt für alle geschlossenenen Integrationswege γ in G*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

so besitzt f in G eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $z_0 \in G$. Für $z \in G$ setze

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi,$$

wobei γ_z ein beliebiger Integrationsweg in G ist, der einen festen Punkt $a \in G$ mit z verbindet. Wir zeigen im folgenden, dass F eine Stammfunktion von f ist, d.h. dass $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in G$ gilt. Wähle hierzu ein $z \in G$ derart, dass $[z_0, z] \subset G$ gilt und setze $\gamma := \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$. Dann ist γ ein geschlossener Weg in G. Nach Voraussetzung und Lemma 3.6 gilt

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)d\xi + \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi = 0.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)d\xi = \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt = (z - z_0) \underbrace{\int_0^1 f(z_0 + t(z_0 - z))dt}_{=:\Delta z}. \end{aligned}$$

Weiter gilt $\Delta(z_0) = f(z_0)$ und Δ ist stetig z_0, da

$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| \to 0$$

gilt für $z \to z_0$. Also ist F komplex differenzierbar und es gilt $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in G$.

$\square$

Wir betrachten weiter Kurvenintegrale ber den Rand von Dreiecken. Es gilt dann der folgende Satz.

3.11 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gilt für alle abgeschlossenen Dreiecke $\triangle \subset G$*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0,$$

so besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Wir setzen $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi$. Da G nach Voraussetzung konvex ist, ist das Dreieck $\triangle_{(a,z_0,z)}$ in G enthalten. Somit gilt

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(z)dz + \int_{[z_0,z]} f(z)dz - \int_{\gamma_z} f(z)dz = \int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Wie im Beweis von Satz 3.10 folgern wir, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$\square$