Im ersten Fall stimmt das Phasenportrait der Linearisierung mit demjenigen des harmonischen Oszillators überein; es handelt sich um Kreise um den Nullpunkt. Auch das Phasenportrait des mathematischen Pendels zeigt geschlossene, nahezu kreisförmige Kurven um 0. Dies kann man jedoch nicht aus dem Linearisierungssatz folgern, da die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i$ von A nicht die Voraussetzungen des Linearisierungssatzes erfüllen.

2 Ljapunov-Stabilität

In diesem Abschnitt betrachten wir autonome Systeme der Form

$$y'(t) = f(y(t)), \tag{2.1}$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \in U$ gilt. Weiter setzen wir voraus, dass $f(0) = 0$ gilt. Eine Lösung dieser Gleichung nennen wir stabil, falls sie die Bedingung der Definition III.4.6 erfüllt.
Für eine Funktion $L \in C^1(U, \mathbb{R})$ definieren wir die Ableitung von L längs Trajektorien als

$$\dot{L}(x) = (\nabla L(x)|f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [L(x + hf(x)) - L(x)].$$

Offenbar ist $\dot{L}$ die Richtungsableitung von L in Richtung f. Ist u eine Lösung der Gleichung (2.1), so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(u(t)) = (\nabla L(u(t))|u'(t)) = (\nabla L(u(t))|f(u(t)) = \dot{L}(u(t)). \tag{2.2}$$

Die folgende Definition ist zentral für diesen Abschnitt.

2.1 Definition. a) Eine Funktion $L \in C^1(U, \mathbb{R})$ heißt *Lyapunov-Funktion für die Gleichung* (2.1), falls gilt:

i) $L(0) = 0,\ L(x) > 0$ für alle $x \in U \setminus \{0\}$,

ii) $\dot{L}(x) \leq 0$ für alle $x \in U$.

b) Gilt in Bedingung ii) sogar $\dot{L}(x) < 0$ für alle $x \in U \setminus \{0\}$, so heißt L *strikte Lyapunov-Funktion* der Gleichung (2.1).

Die für unsere Stabilitätsaussagen entscheidende Eigenschaft einer Lyapunov-Funktion besteht darin, dass sie längs jeder Lösung abnimmt, d.h. es gilt wegen (2.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(u(t)) = (\nabla L(u(t))|f(u(t)) \leq 0,$$

solange $u(t) \in U$ gilt. Den Zusammenhang mit der Stabilität in 0 können wir uns wie folgt plausibel machen.
Für $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon = \{x \in U : L(x) \leq \varepsilon\}$ wegen $L(0) = 0$ eine Umgebung von 0. Da 0 die einzige Nullstelle von L in U ist, ziehen sich die Mengen U_ε für $\varepsilon \to 0$ auf 0 zusammen. Ist nun U_ε kompakt, so bleibt jede in U_ε startende Lösung für wachsendes t in U_ε, denn es gilt

$$L(u(t)) \leq L(u(0)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \geq 0.$$

Hieraus folgt die Stabilität von 0. Ist L eine strikte Lyapunov-Funktion, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} L(u(t)) = 0 \text{ und somit } \lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$

Hierzu interpretieren wir L als Abstandsfunktion zum Punkt 0. Dann ist $\nabla L(x)$ ein äußerer Normalenvektor zur Niveaumenge $N := \{x \in U : L(x) = \varepsilon\}$ und wegen $(\nabla L(x)|f(x)) < 0$ dringen die Punkte $u(t)$ durch den Rand von N in jede Umgebung U_ε ein.

Wir formulieren unsere Plausibilitätsbetrachtungen rigoros in dem folgenden Stabilitätssatz von Lyapunov.

2.2 Theorem. (Stabilitätssatz von Lyapunov).
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $L : U \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für die Gleichung $y' = f(y)$ mit $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $0 \in U$ und $f(0) = 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen:
a) Die Nulllösung von (2.1) *ist stabil.*
b) Ist L eine strikte Lyapunov-Funktion, so ist die Nulllösung von (2.1) *asymptotisch stabil.*

Beweis. a) Wir wählen $\varepsilon_0 > 0$ so klein, dass $B_{\varepsilon_0}(0) \subset U$ gilt. Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ setze $m(\varepsilon) := \min_{|x|=\varepsilon}\{L(x)\}$. Nach Definition der Lyapunov-Funktion gilt $m(\varepsilon) > 0$. Da L stetig ist und $L(0) = 0$ gilt, existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon < \varepsilon$ mit $L(x) < m(\varepsilon)$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Ist u eine Lösung von (2.1) mit $|u(t_1)| < \delta$ für ein $t_1 \geq 0$, so folgt daher $L(u(t_1)) < m(\varepsilon)$ und wegen Eigenschaft ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(u(t)) = (\nabla L(u(t))|f(u(t))) \leq 0.$$

Daher folgt $L(u(t)) < m(\varepsilon)$ für alle $t \geq t_1$.
Gilt $|u(t)| \geq \varepsilon$ für ein $t > t_1$, so existiert aus Stetigkeitsgründen ein $t_2 \geq t_1$ mit

$|u(t_2)| = \varepsilon$. Somit gilt aber $L(u(t_2)) \geq m(\varepsilon)$. Widerspruch! Also gilt $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_1$ und daher die Stabilität der Nulllösung.
b) Ist $y_0 \in B_\delta(0)$, so gilt für jede Lösung u von (2.1) wegen Teil a) $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$. Wir zeigen zunächst, dass eine Folge (t_n) existiert mit $t_n \to \infty$ und $u(t_n) \to 0$. Wäre dies nicht so, so würden $r, T > 0$ existieren mit $|u(t)| > r$ für alle $t \geq T$. Nach Voraussetzung gilt jedoch

$$M := \max\{(\nabla L(x)|f(x)),\ r \leq |x| \leq \varepsilon\} < 0$$

und für alle $t \geq T$ gibt es ein $\tau \in [T, t)$ mit

$$L(u(t)) - L(u(T)) = (t-T)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L \circ u)(\tau) \leq (t-T)M, \quad \tau \in [T, t].$$

Daher existiert $\bar{t} > T$ mit $L(u(\bar{t})) < 0$ im Widerspruch zur Eigenschaft i) von L.
Weiter, da L stetig ist, folgt $L(u(t_n)) \to L(0) = 0$. Um den Beweis zu beenden, zeigen wir noch, dass $u(t_n) \to 0$ gilt für $t_n \to \infty$. Hierzu sei $r > 0$ und $m := \min_{r \leq |x| \leq \varepsilon}\{L(x)\}$. Die Eigenschaft i) impliziert $m > 0$ und daher existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $L(u(t_n)) < m$. Somit gilt $L(u(t)) \leq L(u(t_n)) < m$ für alle $t \geq t_n$, d.h. es gilt $u(t) \in B_r(0)$ für alle $t \geq t_n$.

$\square$

Der entsprechende Instabilitätssatz, welchen wir hier jedoch nicht im Detail beweisen wollen, lautet wie folgt:

2.3 Satz. (Instabilitätssatz). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U$. Es sei $L \in C^1(U, \mathbb{R})$ eine Funktion mit $L(0) = 0$ und es gelte $L(x_j) > 0$ für eine Folge $(x_j) \subset U$ mit $(x_j) \to 0$. Gilt $\dot{L}(x) > 0$ für alle $x \in U \setminus \{0\}$, so ist die Nulllösung von (2.1) instabil.*

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass eine allgemeine Vorgehensweise zur Konstruktion von Lyapunov-Funktionen nicht existiert. In konkreten Fällen erweisen sich Energiefunktionale und Skalarprodukte jedoch oft als hilfreich.

2.4 Beispiele.
a) Wir betrachten den *harmonischen Oszillator* beschrieben durch die Gleichung

$$y''(t) + y(t) = 0.$$

Schreibt man diese Gleichung als System 1.Ordnung, so gilt

$$x'(t) = Ax(t), \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiert man $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$L(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

so gilt:
i) $L(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $L(0) = 0$,
ii)

$$(\nabla L(x)|f(x)) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Nach Theorem 2.2 a) ist die Nulllösung daher stabil.
b) *Nichtlineare Schwingungen* werden oft durch Gleichungen der Art

$$x''(t) + h(x(t)) = 0,$$

für stetige Funktionen h mit $h(y) > 0$ für alle $y \neq 0$ beschrieben. Formuliert man diese Gleichung als System 1. Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -h(x_1). \end{aligned}$$

Wir definieren L durch

$$L(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} h(s)ds,$$

und erhalten:
i) $L(0) = 0, \quad L(x_1, x_2) > 0$ für alle $x = (x_1, x_2) \neq 0$,
ii)

$$(\nabla L(x)|f(x)) = \left(\begin{pmatrix} h(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x_2 \\ -h(x_1) \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Nach Theorem 2.2 a) ist die Nulllösung daher stabil.
c) Betrachtet man *nichtlineare Schwingungen mit Reibung*, d.h. die Gleichung

$$x''(t) + x'(t) + h(x(t)) = 0,$$

und somit das System

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -h(x_1) - x_2, \end{aligned}$$

und definiert L wie in Beispiel b), so gilt

$$\dot{L}(x_1, x_2) = -x_2^2.$$

Wiederum, was natürlich physikalisch auch zu erwarten ist, ist die Nulllösung stabil. Die Frage nach der asymptotischen Stabilität der Nulllösung kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden, da wegen $\dot{L}(x_1, 0) = 0$ für alle x_1, die Funktion L keine strikte Lyapunov-Funktion ist.
d) Aus den vorherigen Abschnitten wissen wir bereits, dass die Lösung u des *linearen Systems*

$$y'(t) = Ay(t) \tag{2.3}$$

mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ asymptotisch stabil ist, sofern $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ gilt. Wir wollen eine für das obige System geeignete Lyapunov-Funktion mit Hilfe dieser Tatsache konstruieren. Dies ergibt für lineare Systeme zunächst keine neue Einsicht, die verwandte Technik wird es aber im folgenden Abschnitt e) erlauben, einen eleganten Beweis des Satzes über die linearisierte Stabilität zu führen.
Hierzu definieren wir mit

$$< a, b >:= \int_0^\infty (e^{tA}a|e^{tA}b)dt, \qquad a, b \in \mathbb{C}^n$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, wobei $(\cdot|\cdot)$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Setzt man $L(x) := \langle x, x\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$L(x + tf(x)) - L(x) = 2t\langle x, f(x)\rangle + t^2\langle f(x), f(x)\rangle,$$

und somit

$$\dot{L}(x) = 2\langle x, f(x)\rangle$$

für f wie in Theorem 2.2. In unserem Beispiel ist speziell $f(x) = Ax$ und somit gilt für eine Lösung $u = e^{tA}x$ von (2.3)

$$\dot{L}(x) = 2\langle x, Ax\rangle = 2\int_0^\infty (e^{tA}x|Ae^{tA}x)dt = 2\int_0^\infty (u(t)|u'(t))dt = |u(t)|^2\Big|_0^\infty = -|x|^2.$$

Nach Theorem 2.2 b) ist die Nulllösung asymptotisch stabil.
e) Wir wollen nun die unter d) beschriebene Vorgehensweise auf die Situation des Satzes über die *linearisierte Stabilität im autonomen Fall* ausdehnen. Hierzu betrachten wir die Gleichung

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t)) \tag{2.4}$$

mit $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ und g erfülle

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0.$$

Setzten wir wie in Beispiel d) $L(x) := \langle x, x\rangle$, so folgt

$$\dot{L}(x) = 2\langle x, Ax + g(x)\rangle = -|x|^2 + 2\langle x, g(x)\rangle \leq -|x|^2 + 2|||x||||||g(x)|||,$$

wobei $|||x||| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ gilt. Da auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind (vgl. Analysis II), existiert ein $C > 0$ mit $|||x||| \le C|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wählt man nun $r > 0$ so, dass $B_r(0) \subset U$ und $|g(x)| \le \frac{1}{4C^2}|x|$ für alle $x \in B_r(0)$ gilt, so folgt

$$\dot{L}(x) \le -|x|^2 + 2C^2|x||g(x)| \le -\frac{1}{2}|x|^2.$$

Also ist L eine strikte Lyapunov-Funktion und die Nulllösung von (2.4) ist asymptotisch stabil.
f) Die folgenden Beispielklassen spielen insbesondere in der Physik eine große Rolle. Wir beginnen mit sogenannten *Gradientensystemen*, d.h. autonomen Systemen, bei welchen die rechte Seite f eine Stammfunktion $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ besitzt, also mit Gleichungen der Form

$$y'(t) = -\nabla g(y(t)). \tag{2.5}$$

Setzt man $L(x) := g(x)$, so gilt

$$\dot{L}(x) \le -|\nabla g(x)|^2, \quad x \in U.$$

Besitzt g in $0 \in U$ ein lokales Minimum und existiert eine Umgebung V von 0 mit $g(x) > g(0)$ und $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$, so ist nach Theorem 2.2 b) die Nulllösung von (2.5) asymptotisch stabil.
g) Wir betrachten die *Bewegung in einem konservativen Kraftfeld.* Genauer gesagt, sei F ein konservatives Kraftfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gelte

$$F(x) = -\nabla V(x),$$

mit einer Potentialfunktion $V \in C^1(U)$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen $x''(t) = F(x)$ lauten dann $x''(t) = -\nabla V(x, t)$ bzw.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\nabla V. \end{aligned}$$

Es handelt sich hier also um ein System von $2n$ Gleichungen. Wählen wir als Lyapunov-Funktion die Energiefunktion, d.h. setzen wir

$$L(x, y) := E(x, y) := V(x) + \frac{1}{2}|y|^2,$$

so gilt

$$\dot{L}(x) = 0.$$

Dies bedeutet, dass L auf den Trajektorien der Lösungen konstant bleibt, also genau den Energieerhaltungssatz. Weiter gilt

$$\nabla E(x, y) = (\nabla V(x), y) = (0, 0) \Leftrightarrow \nabla V(x) = 0 \quad \text{und} \quad y = 0,$$

und wir können die folgende Aussage folgern:
Gilt $\nabla V(0) = 0$ und besitzt V in 0 ein striktes Minimum, so ist die Nulllösung stabil.
h) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Autonome System der Form

$$\begin{aligned} x' &= H_y(x,y) \\ y' &= -H_x(x,y) \end{aligned}$$

werden *Hamiltonsche Systeme* genannt. Hierbei ist H die sogenannte *Hamilton-Funktion*. Verwenden wir die Hamilton-Funktion als Lyapunov-Funktion, d.h. setzen wir $L = H$, so gilt $\dot{L}= 0$ in U. Besitzt die Hamilton-Funktion in 0 ein stiktes Minimum, so ist 0 stabil nach Theorem 2.2.

2.5 Bemerkung. (Lorenz-System).
Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz auf das berühmte *Lorenz-System* eingehen. Es wurde in den 60er Jahren von dem Meteorologen und Mathematiker E.N. LORENZ als Modell einer konvektiven Strömung aufgestellt, welches ein von unten erwärmstes und von oben gekühltes Fluid (z.B. Luft) beschreibt. Dieses Modell war für die Entwicklung der *Chaostheorie* von zentraler Bedeutung. Die Lorenzschen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x' &= c_1(y-x) \\ y' &= c_2x - y - xz \\ z' &= xy - c_3z, \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$. An dieser Stelle können wir hier nur die folgenden Aussagen herleiten:
i) Für $0 < c_2 < 1$ ist die Nulllösung von (2.6) asymptotisch stabil;
ii) Für $c_2 > 1$ ist die Nulllösung von (2.6) instabil.
Um die Aussage i) zu beweisen, benutzen wir die Lyapunov-Funktion

$$L(x,y,z) := x^2 + c_1y^2 + c_1z^2$$

und wenden Theorem 2.2 b) an. Zum Beweis der Aussage ii) zeigen wir, dass die Matrix des linearisierten Systems 3 reelle Eigenwerte, zwei negative und einen positiven, besitzt, und wenden Satz 2.3 an.
Für tiefer liegende, mathematisch sowie philosophisch sehr spannende Fragestellungen müssen wir an dieser Stelle auf die Literatur verweisen.