2 Der Satz von Peano

Unsere bisherigen Untersuchungen von Anfangswertproblemen der Form

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

basierten auf einer Lipschitz-Bedingung an die rechte Seite $f(t, y(t))$ der Differentialgleichung. Ist diese verletzt, zum Beispiel bei der Gleichung

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in I, \quad y(0) = y_0,$$

so kann das Anfangswertproblem (2.1) unendlich viele Lösungen besitzen.
Eine aus grundsätzlicher Sicht wichtiger Problemkreis in diesem Kontext ist die Frage, ob die Stetigkeit der rechten Seite $f(t, y(t))$ bereits ausreicht, um die Existenz einer Lösung von (2.1) zu beweisen. Eine positive Antwort auf diese Frage wurde zuerst von Guiseppe PEANO (1858-1932) gegeben. Wir formulieren sein Ergebnis im folgenden Theorem.

2.1 Theorem. (Satz von Peano). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U von (t_0, y_0), in welcher das Anfangswertproblem*

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

mindestens eine Lösung besitzt.

Dieser Satz lässt sich auf zwei relativ verschiedene Weisen beweisen. Während der erste Ansatz auf einer Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes auf die assozierte Integralgleichung beruht, stützt sich der zweite Ansatz auf das sogenannte Eulersche Polygonzugverfahren. Beide Ansätze benutzen an gewissen Stellen Kompaktheitsargumente, genauer gesagt, den unten beschriebenen Satz von Arzelà-Ascoli.
Wir beginnen mit dem Fixpunktsatz von Schauder. Er macht Gebrauch von den zwei folgenden Begriffen. Eine Teilmenge $D \subset X$ eines Banachraumes X heißt *konvex*, falls mit x, y auch $\lambda x + (1 - \lambda)y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ in D liegen. Ferner heißt eine Menge $K \subset X$ *relativ kompakt*, falls $\overline{K}$ kompakt ist.

2.2 Satz. (Fixpunktsatz von Schauder). *Es sei X ein Banachraum, $D \subset X$ eine abgeschlossene und konvexe Menge und $T : D \to D$ eine stetige Abbildung, so dass $T(D)$ relativ kompakt ist. Dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt in D.*

Im Beweis des Satzes von Peano wenden wir den Schauderschen Fixpunktsatz im Banachraum $X = C([a,b],\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen an. Hierzu müssen wir die relative Kompaktheit gewisser Mengen in X nachweisen. Dies gelingt uns mittels des folgenden Satzes von Arzelà-Ascoli. Hierbei ist der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit einer Menge von Funktionen von Wichtigkeit.

2.3 Definition. Eine Menge $\mathcal{F} \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt *gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisitiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

gilt für alle $|x_1 - x_2| \leq \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$.

Zum Beispiel ist die Menge $\mathcal{F} = \{u \in C^1([a,b],\mathbb{R}) : |u'(x)| \leq M \text{ für alle } x \in [a,b]\}$ für eine $M > 0$ gleichgradig stetig, vgl. die Übungen. Der Satz von Arzelà-Ascoli lautet dann wie folgt.

2.4 Satz. (Satz von Arzelà-Ascoli). *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir zum Beispiel auf ??

Beweis. Nach Lemma 1.1 ist die Behauptung äquivalent dazu, dass der Operator T definiert auf $X := C(I,\mathbb{R}^n)$ durch

$$Tu(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds, \quad t \in I,$$

mindestens einen Fixpunkt in X hat. Hierbei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.
Wir wählen weiter ein kompaktes Intervall J in $\mathbb{R}^n$ um y_0 und nehmen an, dass I und J so klein sind, dass f auf $I \times J$ stetig und somit auch auf $I \times J$ durch eine Konstante M beschränkt ist. Setzt man $\mathcal{F} := \{u \in X : u(t) \in J \text{ für alle } t \in I\}$, so gilt

$$\big|(Tu)(t) - y_0\big| \leq M|t - t_0|,$$

und wir können I so wählen, dass $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ gilt. Wir verifizieren weiter, dass T eine stetige Abbildung von X nach X ist und dass $T(\mathcal{F})$ in X beschränkt ist. Die Menge $T(\mathcal{F})$ ist zudem gleichgradig stetig, denn es gilt

$$\big|Tu(t_1) - Tu(t_2)\big| \leq \Big|\int_{t_2}^{t_1} f(s,u(s))ds\Big| \leq M|t_2 - t_1|$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit einer von u unabhängigen Konstanten M. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist daher $T(\mathcal{F})$ eine in X relativ kompakte Menge und der Schaudersche

Fixpunktsatz impliziert, dass T mindestens einen Fixpunkt $u \in X$ besitzt. Dieser ist eine Lösung des Anfangswertproblems (2.2).

$\square$

Ein alternativer Beweis des Satzes von Peano beruht auf dem sogenannten *Eulerschen Polygonzugverfahren.* Hierzu wählen wir $a, r > 0$ mit $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I$ und $\overline{B_r}(y_0) \subset D$ und setzen

$$R := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_r(y_0)},$$

sowie $M := \max_{(t,x) \in R} |f(t,x)|$ und $\alpha := \min(a, \frac{r}{M})$. Nach Vorausssetzung ist f stetig und daher auf $f|_R$ sogar gleichmäßig stetig. Somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\big|f(s,x) - f(t,y)\big| \le \varepsilon \text{ für alle } (s,x),(t,y) \in R \text{ mit } |s-t| < \delta \text{ und } |x-y| < \delta. \tag{2.3}$$

Wir zerlegen das Intervall $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ nun in Teilintervalle

$$t_0 - \alpha =: t_{-n} < t_{-n+1} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_n := t_0 + \alpha,$$

so, dass $\max_{i=-n+1,\ldots,n} |t_{i-1} - t_i| \le \min(\delta, \frac{\delta}{M})$ gilt. Der Eulersche Polygonzug ist dann für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ definiert durch

$$u(t) := \begin{cases} u(t_i) + (t - t_i) f(t_i, u(t_i)), & i \ge 0, \\ u(t_{i+1}) + (t - t_{i+1}) f(t_{i+1}, u(t_{i+1})), & i < 0. \end{cases}$$

Daher gilt $u \in C(J, \overline{B_r}(y_0))$ sowie $|u(s) - u(t)| \le M|t-s|$ für alle $s, t \in J$. Nach Konstruktion gilt

$$u'(t) = f(t_i, u(t_i)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \cap [t_0, \infty) \text{ bzw. } t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0)$$

sowie

$$|u(t) - u(s)| \le \delta$$

für $t \in [t_i, t_{i+1}] \cap [t_0, \infty)$ bzw. $t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0)$. Mit Gleichung (2.3) folgt

$$\big|u'(t) - f(t, u(t))\big| = \big|f(t_i, u(t_i)) - f(t, u(t))\big| \le \varepsilon$$

für $t \in [t_i, t_{i+1}] \cap [t_0, \infty)$ bzw. $t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0)$. Somit ist u eine Näherungslösung des Anfangswertproblems (2.2). Mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli kann man beweisen, dass zumindest eine Teilfolge (u_j) für $j \to \infty$ gegen eine exakte Lösung konvergiert. Auf den vollständigen Beweis dieser Tatsache wollen wir hier jedoch verzichten.

3 Flüsse und Dynamische Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir autonome Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)), \quad t \in I, \\ y(0) &= x, \end{aligned}$$

wobei $I = (-a, a) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall für $a > 0$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Wie üblich sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Differentialgleichungen der obigen Form, d.h. Gleichungen, bei denen f nicht explizit von t abhängt, werden *autonome Differentialgleichungen* genannt. Geometrisch kann man f als ein (autonomes) Vektorfeld interpretieren.

3.1 Definition. Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und V eine Umgebung von $y_0 \in D$. Eine C^k-Abbildung

$$v : I \times V \to D$$

heißt *Fluss der Klasse* C^k, falls für jedes $x \in V$ die Abbildung

$$t \mapsto v(t, x)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in I \\ y(0) = x \end{cases}$$

ist. Flüsse der Klasse C^0 werden auch stetige Flüsse genannt.

Geometrisch betrachtet bedeutet dies, dass für jeden Anfangswert $x \in V$ die Kurve $I \ni t \mapsto v(t, x)$ die Bahn der Lösung darstellt, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ im Anfangspunkt x startet. Schreibt man suggestiv

$$\varphi_t(x) := v(t, x),$$

so kann man sich vorstellen, dass der Punkt $\varphi_t(x)$ für jedes x mit der Zeit t entlang einer Bahnkurve „fließt“, und dass die Abbildung $\varphi_t : V \to D$ für festes $t \in I$ den Zustand zur Zeit t mit Anfangszustand x beschreibt. Die Familie $(\varphi_t)_{t \in I}$ besitzt dann die folgenden Eigenschaften.

3.2 Lemma. *Es gelten die folgenden Aussagen:*
a) $\varphi_0 = id$
b) Sind $s, t \in I$ *mit* $s + t \in I$ *und* $x \in V$ *mit* $\varphi_s(x) \in V$, *so gilt*

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x).$$

Den einfachen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

3.3 Definition. Eine Familie $(\varphi_t)_{t\in I}$ von Abbildungen mit den obigen Eigenschaften a) und b) heißt *dynamisches System.*

Im folgenden Resultat übertragen wir die obigen Existenz- und Eindeutigkeitssätze sowie den Satz über die stetige Abhängigkeit der Daten auf die Terminologie der Flüsse.

3.4 Satz. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion.*
a) Zu jedem $y_0 \in D$ existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in I, \text{ und } y(0) = y_0.$$

b) Zu jedem $y_0 \in D$ existiert ein stetiger, lokaler Fluss $v \in C(J \times V, D)$ zu f.

Den Beweis der Stetigkeit des Flusses überlassen wir als Übungsaufgabe.