II Existenz- und Eindeutigkeitssätze

1 Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen systematisch untersuchen. Genauer gesagt, betrachten wir Differentialgleichungssysteme erster Ordnung der Form

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

mit einer stetigen Funktion $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt. In einem ersten Schritt transferieren wir die obige Differentialgleichung in eine Integralgleichung.

1.1 Lemma. *Für eine Funktion $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:*

i) $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und u ist eine Lösung von (1.1).

ii) Es gilt $u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds =: (Tu)(t)$ für alle $t \in I$.

Der Beweis ist nicht schwierig. Ist $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (1.1), so folgt

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds = (Tu)(t), \ t \in I.$$

Umgekehrt ist $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $Tu = u$, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $u'(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in I$ sowie $u(t_0) = y_0$, d.h. u ist eine Lösung von (1.1).

Der folgende Satz von Picard-Lindelöf ist einer der ersten Grundpfeiler der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von zentraler Bedeutung ist hierbei eine sogenannte Lipschitzbedingung für f. Genauer gesagt gilt folgendes Theorem.

1.2 Theorem. (Picard-Lindelöf, globale Version.) *Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Ferner genüge die stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einer globalen Lipschitzbedingung, d.h. es existiere ein $L \geq 0$ derart, dass*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{für alle } t \in I \ \text{ und alle } \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0. & \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Genauer gesagt, betrachten wir den linearen Operator $T : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$(Tu)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \ t \in I.$$

Nach Lemma 1.1 ist die Aussage des Theorems dazu äquivalent, dass T genau einen Fixpunkt besitzt. Um dies einzusehen, versehen wir den Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Metrik

$$d(u, v) := \sup_{t \in I} |e^{-(L+1)t}(u(t) - v(t))|, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n).$$

Da

$$e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq e^{-(L+1)a}, \quad t \in [a, b],$$

gilt, ist d eine zur üblichen Metrik auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ äquivalente Metrik. Dies bedeutet, dass $(C(I, \mathbb{R}^n), d)$ ein vollständiger, metrischer Raum ist. Somit ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar und wir verifizieren, dass T eine strikte Kontraktion in $(C(I, \mathbb{R}^n), d)$ ist.

Für $u, v \in C(I, \mathbb{R}^n)$ und $t \geq t_0$ gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= \sup_{t \in I} e^{-(L+1)t} \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s))ds \Big| \\ &\leq \sup_{t \in I} e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} L\big|u(s) - v(s)\big|ds \\ &= \sup_{t \in I} Le^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s} \underbrace{e^{-(L+1)s}\big|u(s) - v(s)\big|}_{\leq d(u,v)} ds \\ &\leq \sup_{t \in I} L\, d(u, v) e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s} ds \\ &= \sup_{t \in I} L\, d(u, v) e^{-(L+1)t} \frac{e^{(L+1)t} - e^{(L+1)t_0}}{L + 1} \\ &\leq \frac{L}{L + 1} d(u, v). \end{aligned}$$

In analoger Weise zeigen wir dies auch für $t \leq t_0$. Also gilt

$$d(Tu, Tv) \leq \frac{L}{L+1} d(u, v),$$

und wegen $\frac{L}{L+1} < 1$ ist die Abbildung $T : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ eine strikte Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert daher genau ein $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ mit $Tu = u$ und dieses u ist nach Lemma 1.1 die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1.2).

□

1.3 Bemerkung. Der obige Beweis gibt ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Lösung von (1.2) an. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Iteration

$$u_n := Tu_{n-1}$$

für jeden Startwert $u_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gegen den Fixpunkt u. Ferner gilt eine a priori Fehlerabschätzung

$$d(u, u_n) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(u_1, u_0)$$

mit $c := \frac{L}{L+1}$. Prinzipiell könnte man also dieses Verfahren auch zur numerischen Berechnung der Lösung verwenden, numerisch gesehen gibt es jedoch hierfür wesentlich bessere Verfahren.

Für viele Anwendungen ist die globale Lipschitzbedingung aus Theorem 1.2 eine zu starke Bedingung. Wir führen daher eine lokale Variante dieser Bedingung ein.

1.4 Definition. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann erfüllt f eine *lokale Lipschitzbedingung* in D, falls für jedes $(t_0, x_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von (t_0, x_0) und eine Konstante $L(t_0, x_0) > 0$ existieren, derart dass gilt

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0)|x_1 - x_2|, \quad (t, x_1), (t, x_2) \in U(t_0, x_0) \cap D.$$

1.5 Bemerkung. Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, so ist f in D lokal Lipschitz-stetig. Dies folgt aus dem Mittelwertsatz, da in einer kompakten Umgebung von $(t_0, x_0) \in D$ alle Ableitungen von f als stetige Funktionen beschränkt sind.

Es ist bemerkenswert, dass die lokale Lipschitz-Stetigkeit bereits die Eindeutigkeit von Lösungen von (1.2) impliziert.

1.6 Satz. *Es sei* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Sind* $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}^n$ *zwei Lösungen der Differentialgleichung* $y'(t) = f(t, y(t))$ *für alle* $t \in I \subset \mathbb{R}$ *und gilt* $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ *für ein* $t_0 \in I$*, so folgt*

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir das sogenannte Lemma von Gronwall, welches auch für spätere Betrachtungen zur stetigen Abhängigkeit von Bedeutung sein wird.

1.7 Lemma. (Lemma von Gronwall).
Es seien $t_0, \tau \in \mathbb{R}$ *mit* $\tau > t_0$ *und* $u, v \in C([t_0, \tau], \mathbb{R})$ *mit* $v \geq 0$*. Gilt für eine Konstante* $a \in \mathbb{R}$

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds, \quad t_0 \leq t \leq \tau,$$

so folgt

$$u(t) \leq a \ \exp^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}, \quad t_0 \leq t \leq \tau.$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $h_\varepsilon(t) := (a+\varepsilon)\exp^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}$. Es gilt dann $h'_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)v(t)$ und somit via Integration

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} h_\varepsilon(s)v(s)ds = (a+\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} h_\varepsilon(s)v(s)ds.$$

Wir zeigen nun, dass

$$u(t) < h_\varepsilon(t) \quad \text{für alle } t \in [t_0, \tau] \tag{1.3}$$

gilt. Zunächst ist klar, dass diese Ungleichung für $t = t_0$ gilt. Nehmen wir an, dass (1.3) nicht für alle $t \in [t_0, \tau]$ gelten würde, so würde ein kleinstes $T \in [t_0, \tau]$ existieren mit $u(T) = h_\varepsilon(T)$. Dies impliziert

$$u(T) \leq a + \int_{t_0}^{T} u(s)v(s)ds < a + \varepsilon + \int_{t_0}^{T} h_\varepsilon(s)v(s)ds = h(T),$$

also einen Widerspruch. Daher gilt (1.3) und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

$\square$

Beweis von Satz 1.6. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.
Schritt 1: Gilt $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ für ein $\tau \in I$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass u_1 und

u_2 auf $I \cap [\tau, \tau + \varepsilon]$ übereinstimmen.
Bezeichnet $L(\tau, u_1(\tau))$ die lokale Lipschitzkonstante von f, so gilt

$$\begin{aligned}
\big|u_1(t) - u_2(t)\big| &= \Big|u_1(\tau) + \int_\tau^t u_1'(s)ds - u_2(\tau) - \int_\tau^t u_2(s)ds\Big| \\
&= \Big|\int_\tau^t f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))ds\Big| \\
&\leq \int_\tau^t \big|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\big|ds \\
&\leq L(\tau, u_1(\tau)) \int_\tau^t \big|u_1(s) - u_2(s)\big|ds,
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$ mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$. Das Lemma von Gronwall impliziert (mit $a = 0, u(s) = |u_1(s) - u_2(s)|, v(s) = L$), dass $u_1 = u_2$ in $[\tau, \tau + \varepsilon]$ gilt.
Schritt 2: Wir zeigen, dass $u_1 = u_2$ in $[t_0, \infty)$ gilt. Hierzu sei $T := \sup\{t \in I : u_1 = u_2 \text{ in } [t_0, t]\}$. Gilt $T = \infty$ oder stimmt T mit dem rechten Intervallende von I überein, so folgt die Behauptung. Anderenfalls existiert ein $\delta > 0$ mit $[T, T + \delta] \subset I$. Aus Stetigkeitsgründen gilt $u_1(T) = u_2(T)$ und somit existiert nach Schritt 1 ein $\varepsilon > 0$ mit $u_1 = u_2$ in $[T, T + \varepsilon]$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Definition von T und somit gilt $u_1 = u_2$ in $[t_0, \infty) \cap I$.
Schritt 3: Wir zeigen $u_1 = u_2$ in $(-\infty, t_0] \cap I$ analog.

□

Wir sind nun in der Lage die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf zu beweisen.

1.8 Theorem. (Picard-Lindelöf, lokale Version).
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U von (t_0, y_0), in welcher das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in I, \\
y(t_0) &= y_0,
\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. a) Existenz der Lösung.
Es sei $(t_0, y_0) \in D$ und $U(t_0, y_0)$ die Umgebung aus Definition 1.4. Durch eventuelles Verkleinern können wir oBdA annehmen, dass

$$U(t_0, y_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V(y_0)$$

für ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $V(y_0) \subset \mathbb{R}^n$ von y_0 gilt. Wir wählen nun $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ eine kompakte Teilmenge von $V(y_0)$ ist und $0 \leq \varphi \leq 1$

sowie $\varphi = 1$ in einer Umgebung $\tilde{V} \subset V(y_0)$ gilt. Dann ist F gegeben durch

$$F(t,x) := \begin{cases} f(t,x)\varphi(x), & (t,x) \in D, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in $U(t_0, y_0)$ stetig und erfüllt dort die *globale* Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} \big|F(t,x_1) - F(t,x_2)\big| &= \big|f(t,x_1)\varphi(x_1) - f(t,x_2)\varphi(x_1) + f(t,x_2)\varphi(x_1) - f(t,x_2)\varphi(x_2)\big| \\ &\leq L(t_0,x_0)|x_1 - x_2|\|\varphi\|_\infty + \big|f(t,x_2)\big|\,\big|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\big| \\ &\leq CL(t_0,x_0)|x_1 - x_2| + C\|\varphi'\|_\infty|x_1 - x_2| \\ &\leq CL(t_0,x_0)|x_1 - x_2|, \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.2 existiert also genau ein $u \in C^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ mit $u'(t) = F(t, u(t))$ und $u(t_0) = y_0$. Ferner, da $u(t_0) = y_0$ und u stetig, gilt $u(t) \in \tilde{V} \subset V(y_0)$ für t nahe bei t_0. Für diese t gilt aber $\varphi(u(t)) = 1$ und somit ist u eine Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$ in einer Umgebung von t_0.
b) Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Satz 1.6.

□

1.9 Beispiele.
a) Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) = t + y(t) =: f(t, y(t).$$

Wegen $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |x_1 - x_2|$ ist f global Lipschitzstetig.
b) Die Funktion $f(t, y(t)) = t^2 + y^2(t)$ ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nicht global, aber lokal Lipschitz-stetig, denn es gilt

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| \leq |x_1 + x_2||x_1 - x_2|.$$

Die lokale Lipschitzstetigkeit können wir natürlich auch aus Bemerkung 1.5 folgern.
c) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t)^{\frac{2}{3}},$$

also die Funktion $f(t,x) := x^{\frac{2}{3}}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Dann ist f nicht lokal Lipschitz-stetig und die eindeutige Lösbarkeit geht in diesem Fall verloren. Neben $y \equiv 0$ ist auch $u(t) = \frac{1}{27}(t-a)^3$ eine weitere Lösung mit $u(a) = 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Wir haben gesehen, dass unter den gegebenen Bedingungen das Anfangswertproblem (1.2) in einer Umgebung $U(t_0, y_0)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Im Folgenden möchten wir die „Größe“ der Umgebung $U(t_0, y_0)$, oder anders gesprochen die Lebensdauer der Lösung genauer untersuchen. Wir beginnen mit dem folgenden Resultat über das maximale Existenzintervall.

1.10 Satz. (Maximales Existenzintervall). *Es sei* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion, welche einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Für* $(t_0, y_0) \in D$ *betrachte das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dann existiert ein eindeutiges t_0 *enthaltendes, offenes Intervall* I *und eine Funktion* $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$*, welche (2.1) erfüllt, so dass für jedes* t_0 *enthaltende, offene Intervall* $\tilde{I}$ *und jede Lösung* $\tilde{u} \in C^1(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$ *von (2.1) gilt:* $\tilde{I} \subset I$ *und* $u|_{\tilde{I}} = \tilde{u}$.

Das obige Intervall I heißt *maximales Existenzintervall* des Anfangswertproblems (2.1).

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ die Menge aller offenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$, für welche eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) in J existiert. Der Satz von Picard-Lindelöf impliziert, dass $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ist. Seien $J_1, J_2 \in \mathcal{M}$ und u_1, u_2 zugehörige Lösungen, so gilt in $J_1 \cap J_2$ nach Satz 1.6 $u_1 = u_2$. Setzt man

$$I := \bigcup_{J \in \mathcal{M}} J,$$

so ist I offen und es gilt $t_0 \in I$. Weiter ist I ein Intervall, da für jedes $t \in I$ ein $J \in \mathcal{M}$ existiert mit $t \in J$ und somit $[t_0, t] \subset J \subset I$ gilt. Auf I definieren wir u via $u(t) := \tilde{u}(t)$ für ein $J \in \mathcal{M}$ mit $t \in J$ und zugehöriger Lösung $\tilde{u}$. Wegen Satz 1.6 ist u eindeutig und wohldefiniert.

□

Die Lebensdauer einer nach dem Satz von Picard-Lindelöf gefundenen Lösung läßt sich wie folgt nach unten abschätzen.

1.11 Satz. (Lifespan). *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf für* $n = 1$ *und für den Quader* $Q := [t_0, t_0 + h] \times [y_0 - c, y_0 + c]$ *mit* $h, c > 0$ *gelte* $Q \subset U(t_0, y_0)$*. Dann existiert die lokale Lösung* u *mindestens im Intervall* $[t_0, t_0 + a]$*, wobei* $a = \min(h, \frac{c}{M})$ *und* $M := \max_{(t,x) \in Q} |f(t, x)|$ *gilt. Ferner gilt* $|u(t) - y_0| \leq c$ *für alle* $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Beweis. Definiert man F durch

$$F(t, x) := \begin{cases} f(t, y_0 + c), & x > y_0 + c, \\ f(t, x), & x \in [y_0 - c, y_0 + c],\ t \in [t_0, t_0 + h], \\ f(t, y_0 - c), & x < y_0 - c, \end{cases}$$

so ist F global Lipschitzstetig. Nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf besitzt die Gleichung

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)), \\ y'(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung v, für welche

$$\big|v(t)-y_0\big| = \Big|\int_{t_0}^t F(s,v(s))ds\Big| \le Ma \le c, \quad t-t_0 \le a,$$

gilt. Somit ist $(t,v(t)) \in Q$ für alle $t \in [t_0, t_0+a]$ und da $F=f$ in Q nach Konstruktion ist, folgt $u(t)=v(t)$ für alle $t\in[t_0,t_0+a]$. Somit existiert u mindestens im Intervall $[t_0, t_0+a]$.

□

Den Abschluss dieses Abschnitts bildet der folgende Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems von den Daten f bzw. vom Anfangswert y_0. Wiederum ist die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite f die entscheidende Bedingung.

1.12 Satz. (Stetige Abhängigkeit von den Daten).
a) Es sei $f \in C([0,\tau]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ eine global Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante L. Für $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$ bezeichne u bzw. v die Lösungen des Anfangswertproblemes

$$y' = f(t,y(t)),\ y(0)=y_0, \qquad bzw. \qquad y' = f(t,y(t)),\ y(0)=y_1.$$

Dann gilt mit $c=\frac{L}{L+1}$

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \big|e^{-(L+1)t}\ (u(t)-v(t))\big| \le \frac{|y_0-y_1|}{1-c}.$$

b) Es seien $f,g\in C([0,\tau]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_\infty<\infty$ und f sei global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Ferner sei $c=\frac{L}{L+1}$. Für $y_0\in\mathbb{R}^n$ seien u bzw. v die Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y),\ y(0)=y_0, \qquad bzw. \qquad y' = g(t,y),\ y(0)=y_0.$$

Dann gilt

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \big|e^{-(L+1)t}(u(t)-v(t))\big| \le \|f-g\|_\infty \frac{\tau}{1-c}.$$

Beweis. Es sei

$$d(u,v) := \sup_{t\in[0,\tau]} \big|e^{-(L+1)t}(u(t)-v(t))\big|$$

die schon im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf betrachtete Metrik.
a) Wie im Beweis von Theorem 1.2 gilt

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \sup_{t\in[0,\tau]} e^{-(L+1)t}\Big|y_0-y_1+\int_0^t f(s,u(s))ds - f(s,v(s))ds\Big| \\ &\le |y_0-y_1| + L\sup_{t\in[0,\tau]} e^{-(L+1)t}\int_0^t \big|u(s)-v(s)\big|ds \\ &\le |y_0-y_1| + \frac{L}{L+1}\, d(u,v), \end{aligned}$$

also folgt

$$d(u, v) \leq (L+1)|y_0 - y_1| = \frac{1}{c-1}|y_0 - y_1|.$$

b) Wegen

$$u(t) - v(t) = \int_0^t f(s, u(s)) - f(s, v(s))ds + \int_0^t f(s, v(s)) - g(s, v(s))ds$$

gilt

$$d(u, v) \leq \frac{L}{L+1}\, d(u, v) + \tau \|f - g\|_\infty,$$

und somit

$$d(u, v) \leq \frac{\tau}{1-c}\|f - g\|_\infty.$$

$\square$