Analysis I für M, LaG, Ph

15. Tutorium

Lösungsvorschlag

T41 Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0,$$

für jede stetige Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $f \equiv 0$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$. OBdA können wir weiter annehmen, dass $f(x_0) > 0$ gilt (der Fall $f(x_0) < 0$ wird ganz analog behandelt). Da f stetig ist, gibt es ein $0 < \varepsilon < \max\{x_0 - a, b - x_0\}$, so dass $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ für alle x in der Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$.
Nun konstruieren wir eine bestimmte stetige Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \backslash U_\varepsilon(x_0) \\ \frac{2}{\varepsilon}x - \frac{2}{\varepsilon}(x_0 - \varepsilon) & \text{für } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{2}{\varepsilon}x + \frac{2}{\varepsilon}(x_0 + \varepsilon) & \text{für } x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Die Funktion ϕ ist also in der Umgebung $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ identisch 1 und außerhalb der Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ identisch 0. In den verbleibenden Intervallen wurde der Graph stetig linear verbunden (linear interpoliert). Damit ist ϕ eine positive stetige Funktion und wir erhalten

$$\int_a^b f\phi dx \geq \int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} f dx \geq \varepsilon \cdot \inf_{y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)} f(y) \geq \varepsilon \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

(Widerspruch zur Voraussetzung!)

T42 Hölder-Ungleichung

Diese Aufgabe behandelt einen Spezialfall der sogenannten *Hölder-Ungleichung*. Diese Ungleichung wird in der Analysis häufig verwendet, um Integrale abzuschätzen.
Seien also $f, g \in C^0([a,b])$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt die Ungleichung

$$\int_a^b |fg|dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Verwende die *Young'sche Ungleichung* aus der Vorlesung:
Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt für alle $a, b \geq 0$ die Abschätzung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Zunächst betrachten wir den Fall, dass $\int_a^b |f|^p dx = 0$ *(den Fall* $\int_a^b |g|^q dx$ *behandelt man dann analog). Angenommen es gibt ein* $x_0 \in [a,b]$ *mit* $|f(x_0)| > 0$*. Wegen der Stetigkeit von* $|f|$ *gibt es dann auch eine* ε*-Umgebung* $U_\varepsilon(x_0) \subset [a,b]$*, so dass für alle* $x \in U_\varepsilon(x_0)$ *gilt* $|f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$*. Demnach hätten wir*

$$\int_a^b |f|^p dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f|^p dx \geq \frac{|f(x_0)|^p}{2^p} \cdot 2\varepsilon > 0.$$

(Widerspruch zum betrachteten Fall!) Also $f \equiv 0$ *und damit* $\int_a^b |fg| dx = 0$*. Die behauptete Ungleichung ist also in diesem Fall erfüllt.*
Nun seien $\int_a^b |f|^p dx \neq 0 \neq \int_a^b |g|^q dx$*. Wir definieren*

$$a := \frac{|f|}{\|f\|_p} \qquad \text{und} \qquad b := \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

mit $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ *und* $\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$*. Die Young'sche Ungleichung liefert uns nun*

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Integrieren wir über die linke und die rechte Seite obiger Abschätzung, so erhalten wir wegen der Monotonie des Integrals (s Skript Seite 174, Satz (ii)) folgende Abschätzung

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_a^b |fg| dx \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_a^b |f|^p dx + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_a^b |g|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Setzen wir $\|fg\|_1 := \int_a^b |fg| dx$*, so haben wir damit die Hölder-Ungleichung in einer komprimierten Schreibweise:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

T43 Integration

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx.$$

Wenden wir die Formel der Produktintegration (s. Skript Seite 181) an, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx &= \frac{1}{m}\sin(mx)\sin(nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) dx \\ &= -\frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) dx.\end{aligned}$$

Daraus sehen wir, dass das Integral verschwindet, falls $m = n$ *gilt. Für den Fall* $m \neq n$ *müssen wir nochmals partiell integrieren:*

$$\begin{aligned}-\frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) dx &= \frac{n}{m^2}\cos(mx)\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx \\ &= \frac{n^2}{m^2}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx.\end{aligned}$$

In diesen Fall haben wir also

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx = \frac{n^2}{m^2}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx.$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt demnach

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0.$$

Alternativer Beweis: Wir können das Integral auch mit Hilfe der Additionstheoreme (s Skript Seite 154) lösen. Sei zunächst $m = n$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(2\cos(mx)\sin(mx)\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\left(2mx\right)dx = -\frac{\cos(2mx)}{4m}\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Nun behandeln wir den Fall $m \neq n$. Hierfür addieren wir geschickt eine Null zum Integral hinzu:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx \\ &\quad= \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \\ &\quad= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\left((m+n)x\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\left((m-n)x\right)dx \\ &\quad= -\frac{\cos\left((m+n)x\right)}{2(m+n)}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos\left((m-n)x\right)}{2(m-n)}\Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$