



# Analysis I für M, LaG, Ph

## 15. Tutorium

### T41 Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0,$$

für jede stetige Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige, dass  $f \equiv 0$ .

### T42 Hölder-Ungleichung

Diese Aufgabe behandelt einen Spezialfall der sogenannten *Hölder-Ungleichung*. Diese Ungleichung wird in der Analysis häufig verwendet, um Integrale abzuschätzen.

Seien also  $f, g \in C^0([a, b])$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt die Ungleichung

$$\int_a^b |fg|dx \leq \left( \int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Hinweis:* Verwende die *Young'sche Ungleichung* aus der Vorlesung:  
Sind  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , so gilt für alle  $a, b \geq 0$  die Abschätzung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

### T43 Integration

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx.$$