Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
4. Februar 2009

# 14. Tutorium zur „Analysis I (deutsch)"

**T39** (Differenzierbarkeit)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige:

i) $f_\alpha$ ist genau dann stetig, wenn $\alpha > 0$.

ii) $f_\alpha$ ist genau dann differenzierbar, wenn $\alpha > 1$.

iii) $f_\alpha$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn $\alpha > 2$.

Insbesondere haben wir mit $\alpha \in (1, 2]$ Beispiele für Funktionen, die differenzierbar sind, deren Ableitung aber unstetig ist. Vergleiche auch den Satz von Darboux vom Tutoriumsblatt Nr. 12, der zeigt, dass Ableitungen keine Sprungstellen besitzen können. Trotzdem können sie unstetig sein, wie dieses Beispiel zeigt.

**Lösung:** Die Funktion $f_\alpha$ ist offensichtlich stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{\alpha-2} \cos(\frac{1}{x})$$

für $x \neq 0$.

i) Wir müssen noch die Stetigkeit in $x = 0$ untersuchen.
Für $\alpha \leq 0$ ist $x_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ eine Nullfolge im Definitionsbereich, für die gilt

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_k) = x_k^\alpha \sin(\frac{1}{x_k}) &= \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)^{-\alpha} \sin(\frac{(4k+1)\pi}{2}) \\ &= \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)^{-\alpha} \to \begin{cases} \infty, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Funktionswert $f_\alpha(0)$ ist aber 0. Also kann $f_\alpha$ nicht stetig in $x = 0$ sein.
Für $\alpha > 0$ schätzen wir einfach ab: Sei $(x_k)_k$ eine Nullfolge. Dann gilt

$$|f_\alpha(x_k) - f_\alpha(0)| = |x_k^\alpha \sin(\frac{1}{x})| \leq |x_k^\alpha| \to 0$$

für $k \to \infty$. Also ist $f_\alpha$ stetig auch in $x = 0$.

ii) Um Differenzierbarkeit im Punkte $x = 0$ zu überprüfen, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{h}(f_\alpha(h) - f_\alpha(0)) = \frac{1}{h}(h^\alpha \sin(\frac{1}{h})) = h^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{h}).$$

Wieder folgt mit der speziellen Folge $x_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}$, dass der Grenzwert für $h \to 0$ nicht existiert, falls $\alpha \leq 1$. Im Falle $\alpha > 1$ können wir ählich wie in i) abschätzen und erhalten den Grenzwert $f'_\alpha(0) = 0$.

iii) Die Ableitung hat nun die Form:

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{\alpha-2} \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\alpha \leq 2$. Wir betrachten dieses Mal die Nullfolge $x_k = (2\pi k)^{-1}$. Für diese Folge gilt:

$$f'_\alpha(x_k) = (2\pi k)^{-\alpha+1} \sin(2\pi k) - (2\pi k)^{-\alpha+2} \cos(2\pi k) = -(2\pi k)^{-\alpha+2} \to \begin{cases} -\infty, & \alpha < 2 \\ -1, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Da aber $f'_\alpha(0) = 0$ ist, kann $f'_\alpha$ nicht stetig in $x = 0$ sein.
Wir haben für $\alpha > 2$ die Abschätzung

$$|f'_\alpha(x) - f'_\alpha(0)| \leq \alpha |x|^{\alpha-1} |\sin(\frac{1}{x})| + |x|^{\alpha-2} |\cos(\frac{1}{x})| \leq \alpha |x|^{\alpha-1} + |x|^{\alpha-2} \to 0$$

für $x \to 0$. Also ist dann die Ableitung $f'_\alpha$ stetig auch in $x = 0$.

**T40** (Euler'sche Formel)
Zeige mit Hilfe der Euler'schen Formel:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

für alle $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

**Lösung:** Wir schreiben mit Hilfe der geometrischen Summe ($e^{ix} \neq 1$, da $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}. \end{aligned}$$

Wir teilen nun Zähler und Nenner durch $e^{i\frac{1}{2}x}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} &= \frac{\cos(\frac{1}{2}x) - i\sin(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x) - i\sin((n+\frac{1}{2})x)}{-2i\sin(\frac{1}{2}x)} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}\right) + i\left(\frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}\right). \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir Real- und Imaginärteil und bekommen die gewünschten Formeln.