Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
4. Februar 2009

14. Tutorium zur „Analysis I (deutsch)“

T39 (Differenzierbarkeit)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige:

i) f_α ist genau dann stetig, wenn $\alpha > 0$.

ii) f_α ist genau dann differenzierbar, wenn $\alpha > 1$.

iii) f_α ist genau dann stetig differenzierbar, wenn $\alpha > 2$.

Insbesondere haben wir mit $\alpha \in (1, 2]$ Beispiele für Funktionen, die differenzierbar sind, deren Ableitung aber unstetig ist. Vergleiche auch den Satz von Darboux vom Tutoriumsblatt Nr. 12, der zeigt, dass Ableitungen keine Sprungstellen besitzen können. Trotzdem können sie unstetig sein, wie dieses Beispiel zeigt.

T40 (Euler'sche Formel)
Zeige mit Hilfe der Euler'schen Formel:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

für alle $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.